

**CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO TECNOLÓGICO  
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TUXTLA GUTIÉRREZ**

**INGENIERÍA MECÁNICA**

**EVALUACIÓN EXPERIMENTAL DE UN PROTOTIPO DE AMORTIGUADOR POR FRICCIÓN Y  
RIGIDEZ VARIABLE**

PRESENTA:

**ISIDRO ANDRÉS MENDOZA ARELLANOS**

ASESOR EXTERNO

**DR. ELADIO MARTÍNEZ RAYÓN**

CO-ASESOR EXTERNO

**DR. LUIS FERNANDO CASTRO LÓPEZ**

ASESOR INTERNO

**M.C. IGNACIO ARRIJOJA CARDENAS**

**CUERNAVACA, MORELOS**

**22 DE JUNIO DEL 2017**

# Contenido

Resumen .....	i
Objetivo general .....	ii
Objetivos específicos.....	ii
Justificación .....	ii
1. Estado del Arte .....	1
1.1 Contacto mecánico .....	1
1.1.1 Contacto Hertziano .....	2
1.1.2 Contacto no Hertziano.....	14
1.2 Fricción .....	16
1.2.1 Modelos de fricción estáticos .....	17
1.2.2 Modelos de fricción dinámicos .....	20
1.3 Ciclos de histéresis .....	24
1.4 Amortiguadores por fricción variable .....	28
1.4.1 Sistema de restricción de disipación de energía (EDR).....	28
1.4.2 Nuevo amortiguador de fricción variable .....	31
1.4.3 Amortiguador por fricción de resistencia variable (VRF).....	34
1.4.4 Amortiguador pasivo de fricción variable (VFD).....	36
1.5 Conclusión .....	38
2. Descripción del prototipo de amortiguador por fricción y rigidez variable .....	39
2.1 Funcionamiento del amortiguador .....	40
2.2 Especificaciones técnicas del prototipo .....	45
3. Análisis estático del prototipo de amortiguador por fricción.....	50
3.1 Calibración del sensor de desplazamiento.....	52
3.2 Análisis estático.....	53
3.3 Resultados.....	55
4. Análisis dinámico al prototipo de amortiguador por fricción y rigidez variable.....	57
4.1 Metodología para la elaboración de las pruebas .....	57
4.2 Análisis dinámico.....	58
4.3 Resultados.....	67
4.4 Conclusiones .....	72
4.5 Recomendaciones.....	73
4.6 Referencias.....	74

## Resumen

En este trabajo se abordan temas como el contacto mecánico en el cual se habla acerca del contacto hertziano y el contacto no hertziano en sus diferentes formas así como las ecuaciones que rigen estos modelos. Por otro lado se hace una revisión de los principales modelos de fricción estáticos y dinámicos así como las ecuaciones que los rigen tomando en cuenta variables como el micro deslizamiento, fricción dinámica y micro amortiguamiento. Adicionalmente se analizan los ciclos de histéresis como una herramienta para cuantificar la disipación de energía en un sistema dinámico y particularmente como base para la evaluación de sistemas de amortiguamiento por fricción. Por otro lado se hace un recuento de los principales amortiguadores por fricción variable que se han desarrollado a lo largo de los años, características principales, funcionamiento y aplicaciones, así también cómo se comportan a partir del análisis de las curvas de histéresis que se logran obtener a partir de pruebas experimentales. Finalmente se hace un análisis estático y dinámico de un prototipo de amortiguador por fricción y rigidez variable con el cual se busca obtener ciclos de histéresis variando parámetros como: frecuencia de excitación, amplitud de la excitación y precarga y caracterizar su comportamiento a partir de una excitación armónica.

## **Objetivo general**

Analizar experimentalmente el fenómeno de disipación de energía mediante fricción de un prototipo de amortiguador por fricción y rigidez.

### **Objetivos específicos**

- Realizar un estudio estático y dinámico del prototipo.
- Cuantificar la disipación de energía del amortiguador para diferentes condiciones de funcionamiento así como su rigidez.
- Comparar los resultados con otros amortiguadores por fricción con la finalidad de resaltar las ventajas del prototipo estudiado.

### **Justificación**

Actualmente el amortiguamiento es un tema de suma importancia en los dispositivos mecánicos que sufren vibraciones ya que estas pueden provocar fallos en el funcionamiento y como consecuencia un mayor gasto de mantenimiento y otros factores que generan altos costos. Generalmente no es posible utilizar el mismo método de disipación de energía en todos los lugares ya que en algunos casos las condiciones pueden ser extremas debido a varios factores como la temperatura, el difícil acceso o lugares donde se requiera una disipación de gran magnitud. El uso de la disipación de energía por medio de la fricción se ha ido utilizando a lo largo de los años a través de los autos y otros transportes pero con la progresiva innovación en estos dispositivos este método de amortiguamiento ha quedado en el pasado. Sin embargo, la disipación de energía por fricción sigue siendo de gran importancia ya que generalmente es usada para el amortiguamiento de edificios o casas en donde se requiere de un gran esfuerzo y donde los amortiguadores convencionales no podrían trabajar eficazmente bajo tales condiciones. Es por eso que la creación, estudio y análisis de dispositivos disipadores de energía por medio de fricción sigue siendo de suma importancia para dar una protección más eficiente a edificios de los movimientos telúricos y altas vibraciones que puedan causar un daño material y en el peor de los casos pérdidas humanas.

## 1. Estado del Arte

En este capítulo se describen los tipos de contactos considerados en la teoría de Hertz así también las ecuaciones que rigen cada uno de los tipos de contacto así mismo se analiza brevemente el contacto superficial así también como las ecuaciones que se involucran en dicha teoría. Por otra parte se estudian los ciclos de histéresis de fricción analizando sus características principales y aplicaciones. Adicionalmente se analizan los distintos modelos de fricción estáticos y dinámicos así como las ecuaciones que los rigen. Por último se describen los distintos amortiguadores por fricción que se han desarrollado a lo largo de los años y con estos, los ciclos de histéresis de fricción que genera cada amortiguador para realizar una comparación entre otros dispositivos analizados.

### 1.1 Contacto mecánico

El contacto mecánico se ocupa principalmente en el estudio del contacto entre cuerpos elásticos que son los que tienden a deformarse y tomar su forma original al momento de cesar el contacto y los plásticos que sufren una deformación permanente en el área de contacto. El contacto mecánico suele darse de forma estática que es cuando los objetos únicamente se tocan y se mantienen estables, así mismo está el contacto dinámico que es provocado por cargas dinámicas y algún tipo de movimiento ya sea de uno u otro o de ambos cuerpos. En la figura 1.1 se muestra un ejemplo de un contacto de línea entre un riel y una rueda de tren.

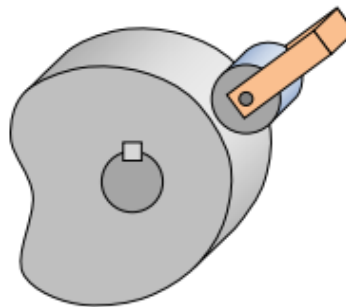


Figura 1.1 Contacto típico entre un riel y una rueda de un tren

Cuando dos superficies no conformadas entran en contacto, estas se tocan en un punto en particular o a lo largo de una línea (ver figura 1.2). La teoría de contacto es requerida para predecir la forma del área de contacto y como está crece al ir incrementando la carga, la magnitud y distribución de las tracciones en la superficie, normal y tangencial, transmitidas a través de la interfaz así también la presión que se genera en la zona de contacto (Johnson, 1985).



a)

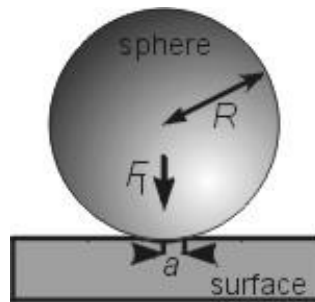


b)

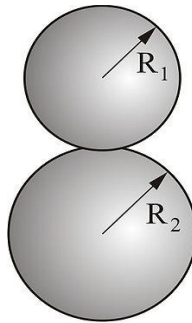
Figura 1.2 Contacto de punto y de línea donde: a) Rodamiento de bolas presentando contacto de punto, b) Leva con seguidor de rodillo presentando contacto de línea.

### 1.1.1 Contacto Hertziano

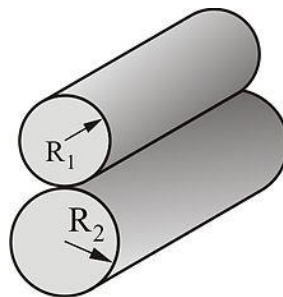
El contacto hertziano se basa en el estudio de contacto entre dos superficies no conformadas, algunos ejemplos de contacto hertziano son: el contacto entre una esfera y un semiespacio plano (ver figura 1.3a), contacto entre dos esferas de radios diferentes o iguales (ver figura 1.3b), el contacto entre dos cilindros de radios diferentes ya sea un contacto paralelo o un contacto perpendicular entre sus superficies (ver figura 1.3c). La resolución de este tipo de problema consiste en determinar: la superficie de contacto y la distribución de presiones en la superficie de contacto.



a)



b)



c)

Figura 1.3 Tipos de contacto Hertziano donde: a) Contacto entre una esfera y un semiespacio plano elástico, b) Contacto entre dos esferas de radios distintos, c) Contacto paralelo entre 2 cilindros. (Popov, 2010).

#### *Consideraciones de la teoría de Hertz:*

Algunas consideraciones de esta teoría para comenzar el análisis y el cálculo son las siguientes:

1. Ambas superficies en contacto son consideradas topográficamente lisas para ambos casos, ya sea en micro o macro escala. Para la micro escala esto representa la ausencia de pequeñas irregularidades en la superficie que provocarían un contacto discontinuo o altas variaciones de presión en el área de contacto.

2. El área de contacto generalmente será elíptica, y cada cuerpo es considerado como elástico cargado sobre una pequeña región elíptica de su superficie plana.
3. Las superficies deben ser continuas y no conformadas
4. Cada cuerpo sólido es considerado como isotrópico elástico
5. Las superficies no tienen fricción, así que solo una presión normal es transmitida entre ellas. (Johnson, 1985).

➤ **Contacto entre una esfera y un plano**

El desplazamiento vertical en la zona de contacto entre una esfera de radio  $R$  y una superficie que se encuentra inicialmente plana o sin deformación (ver figura 1.4) está dado por la ecuación:

$$d = \frac{\pi a P_0}{2E^*} \quad [1.1]$$

donde:

$d$  es el desplazamiento en la superficie de contacto

$a$  es el radio de contacto

$P_0$  es la presión máxima en el área de contacto

$E^*$  es el módulo de Young equivalente

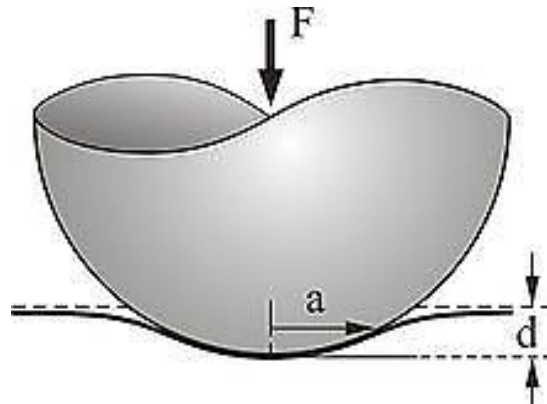


Figura 1.4 Contacto entre una esfera y un semiespacio elástico donde se aprecia las variables principales a calcular (Popov, 2010).

En el análisis se trata de encontrar los parámetros que en realidad influyen en los esfuerzos como son  $a$  que es el radio del área de contacto y  $P_0$  que es la presión máxima generada en el área de contacto y pueden ser calculados con las siguientes ecuaciones:



$$a = \frac{\pi P_0 R}{2E^*} \quad [1.2]$$

$$P_0 = \frac{2}{\pi} E^* \sqrt{\frac{d}{R}} \quad [1.3]$$

donde:

$P_0$  es la presión máxima generada en el área de contacto

$R$  es el radio de la esfera en contacto

$d$  es la profundidad de la superficie de contacto

$E^*$  es el módulo de Young equivalente

El módulo de Young equivalente puede ser calculado con la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad [1.4]$$

donde:

$E_1, E_2$  son los módulos de elasticidad de cada uno de los elementos en contacto

$\nu_1$  y  $\nu_2$  son las relaciones de Poisson de cada uno de los elementos en contacto, en este caso, la esfera y el semiespacio plano.

También podemos obtener la presión normal ejercida sobre el área de contacto en función del radio del área de contacto (ver figura 1.5) con la siguiente ecuación:

$$p(r) = P_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad [1.5]$$

donde:

$P_0$  es la presión máxima generada en el área de contacto

$a$  es el radio del área de contacto

$r$  es el radio en donde queramos conocer la presión, este varía desde 0 hasta  $a$

Para la obtención de la fuerza normal aplicada sobre el área de contacto tenemos la siguiente ecuación:

$$F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2} \quad [1.6]$$

donde:

$F$  es la fuerza normal aplicada

$E^*$  es el módulo de Young equivalente

$R$  es el radio de la esfera

$d$  es la profundidad de la superficie de contacto

Se puede relacionar la fuerza normal aplicada con la presión máxima en el área de contacto, el radio del área de contacto y la profundidad  $d$  con las siguientes ecuaciones:

$$P_0 = \left( \frac{6FE^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3} \quad [1.7]$$

$$a = \left( \frac{3FR}{4E^*} \right)^{1/3} \quad [1.8]$$

$$d = \frac{a^2}{R} = \left( \frac{9F^2}{16E^{*2}R} \right)^{1/3} \quad [1.9]$$

donde:

$F$  es la fuerza normal aplicada

$a$  es el radio del área de contacto

$E^*$  es el módulo de Young equivalente

$R$  es el radio de la esfera

Los esfuerzos cortantes máximos, pueden ser calculados con la siguiente ecuación:

$$\tau_{max} = 0.31P_0 \quad [1.10]$$

donde:

$P_0$  es la presión máxima generada en el área de contacto

$\tau_{max}$  es el esfuerzo cortante máximo

El esfuerzo cortante máximo ocurre a una profundidad  $z$  por debajo del área de contacto, esta profundidad puede ser aproximada con la siguiente ecuación:

$$z = 0.47a \quad [1.11]$$

donde:

$a$  es el radio del área de contacto

$z$  es la profundidad por debajo del área de contacto donde ocurre el esfuerzo cortante máximo.

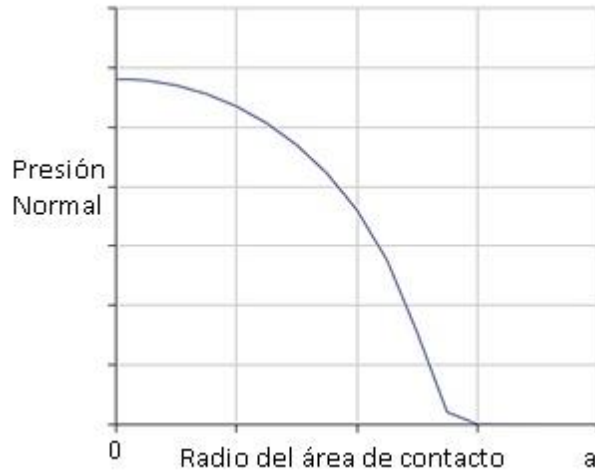


Figura 1.5 Distribución de esfuerzos de contacto entre una esfera y un semiespacio plano.

➤ **Contacto entre dos esferas**

El contacto inicial entre dos esferas (ver figura 1.6) se dará en un punto en común y es ahí donde se generaran los mayores esfuerzos. El desplazamiento en la superficie de contacto entre dos esferas está dado por la siguiente ecuación:

$$d = \frac{\pi a P_0}{2E^*} \quad [1.12]$$

donde:

$d$  es el desplazamiento en la superficie de contacto

$a$  es el radio de contacto

$P_0$  es la presión máxima en el área de contacto

$E^*$  es el módulo de Young equivalente

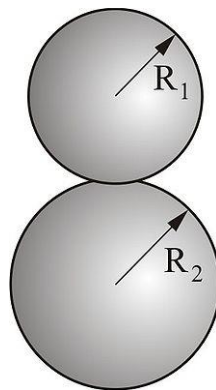


Figura 1.6 Contacto entre dos esferas elásticas de radios distintos, inicialmente estas se tocan en un punto común (Popov, 2010).

Para calcular el radio del área de contacto entre dos esferas de radios distintos se utiliza la siguiente ecuación:

$$a = 1.11 \left[ \frac{F}{E^*} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) \right]^{1/3} \quad [1.13]$$

donde:

$a$  es el radio del área de contacto

$F$  es la fuerza normal aplicada

$E^*$  es el módulo de Young equivalente

$R_1$  y  $R_2$  son los radios de ambas esferas

Para el cálculo de la presión máxima debido únicamente a la carga normal, es necesario calcular un radio equivalente y un módulo de Young equivalente los cuales se obtienen de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad [1.14]$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad [1.15]$$

donde:

$R$  es el radio equivalente

$E^*$  es el módulo de Young equivalente

$R_1$  y  $R_2$  son los radios de ambas esferas

$E_1$  y  $E_2$  son los módulos de Young de ambas esferas

$\nu_1$  y  $\nu_2$  son las constantes de Poisson de ambas esferas

Para el cálculo de la presión máxima ejercida en el área de contacto (ver figura 1.7) y la fuerza normal aplicada se aplican las siguientes ecuaciones:

$$P_0 = \frac{2}{\pi} E^* \left( \frac{d}{R} \right)^{1/2} \quad [1.16]$$

$$F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2} \quad [1.17]$$

donde:

$P_0$  es la presión máxima generada en el área de contacto

$E^*$  es el módulo de Young equivalente

$d$  es la profundidad del área de contacto

$R$  es el radio equivalente

$F$  es la fuerza normal aplicada

Para el cálculo de la presión máxima en función de ambos radios y de la fuerza normal aplicada se implementa la siguiente ecuación:

$$P_0 = -0.388 \left[ F E^{*2} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}} \quad [1.18]$$

donde:

$P_0$  es la presión máxima generada en el área de contacto

$F$  es la fuerza normal aplicada

$R_1$  y  $R_2$  son los radios de ambas esferas

$E^*$  es el módulo de Young equivalente

El esfuerzo cortante máximo se da a una distancia  $z$  por debajo de la superficie de contacto, y se obtiene de la siguiente ecuación:

$$\tau_{max} = 0.31 P_0 \quad [1.19]$$

donde:

$P_0$  = Presión máxima generada en el área de contacto

$\tau_{max}$  = Esfuerzo cortante máximo

La distancia  $z$  en donde se genera el esfuerzo cortante máximo puede ser calculada con la siguiente ecuación:

$$z = 0.47a \quad [1.20]$$

donde:

$a$  es el radio del área de contacto

$z$  es la distancia por debajo del área de contacto donde se genera el esfuerzo cortante máximo.

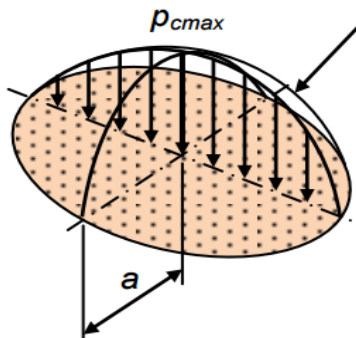


Figura 1.7 Distribución de esfuerzos en el contacto de dos esferas, en el cual se aprecia el radio del área de contacto y donde se genera la presión máxima.

➤ **Contacto entre dos cilindros con ejes perpendiculares**

Para el análisis del contacto entre dos cilindros de radio  $R$  que entran en contacto de forma perpendicular (ver figura 1.8), se considera el contacto como si fuera entre una esfera rígida de radio  $R$  y un semiespacio plano lo cual implica el uso de las mismas ecuaciones.

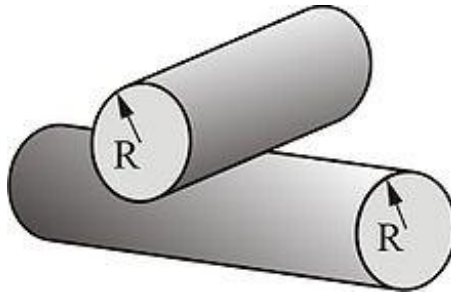


Figura 1.8 Contacto entre dos cilindros de ejes cruzados, para este análisis se considera el modelo esfera – plano como un equivalente (Popov, 2010).

➤ **Contacto entre dos cilindros con ejes paralelos**

En el caso en donde dos cilindros entran en contacto de forma paralela la zona de contacto será una línea a lo largo del cilindro. En este caso se dice que la fuerza es linealmente proporcional a la profundidad de penetración (ver figura 1.9).

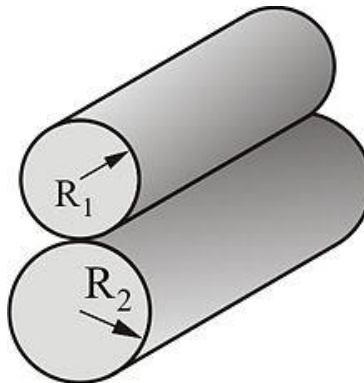


Figura 1.9 Contacto entre dos cilindros con ejes paralelos, en este, el contacto se da a lo largo de una línea paralela a los ejes (Popov, 2010).

Los parámetros relevantes a calcular para este análisis son la fuerza aplicada, el radio del área de contacto y la presión máxima, los cuales se obtienen de las siguientes ecuaciones:

$$d = \frac{\pi a P_0}{2E^*} \quad [1.21]$$

$$F = \frac{\pi}{4} E^* L d \quad [1.22]$$

$$a^2 = \frac{4FR}{\pi E^*} \quad [1.23]$$

$$a = \sqrt{Rd} \quad [1.24]$$

donde:

$L$  es la longitud de los cilindros en contacto

$E^*$  es el módulo de Young equivalente

$R$  es el radio equivalente

$d$  es la profundidad del área de contacto

$a$  es el radio del área de contacto

Para encontrar el módulo de Young equivalente y el radio equivalente utilizamos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad [1.25]$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad [1.26]$$

donde:

$R$  es el radio equivalente

$E^*$  es el módulo de Young equivalente

$R_1$  y  $R_2$  son los radios de ambos cilindros

$E_1$  y  $E_2$  son los módulos de Young de ambos cilindros

$\nu_1$  y  $\nu_2$  son las constantes de Poisson de ambos cilindros

Para el cálculo de la presión con respecto al radio del área de contacto tenemos la siguiente ecuación:

$$P(r) = \frac{2F}{\pi a^2} (a^2 - r^2)^{1/2} \quad [1.27]$$

donde:

$F$  es el fuerza aplicada

$a$  es el radio del área de contacto

$r$  es el radio al cual queremos conocer la presión, este varia de 0 hasta  $a$

Para el cálculo de la presión máxima (ver figura 1.10) se tiene la siguiente ecuación:

$$P_0 = \left( \frac{E^* F}{RL} \right)^{1/2} \quad [1.28]$$

donde:

$F$  es la fuerza aplicada

$E^*$  es el módulo de Young equivalente

$R$  es el radio equivalente

$L$  es la longitud de los cilindros en contacto

Los esfuerzos cortantes máximos se dan a una distancia  $z$  por debajo de la superficie de contacto y están dados por la siguiente ecuación:

$$\tau_{max} = 0.3P_0 \quad [1.29]$$

donde:

$P_0$  es la presión máxima generada en el área de contacto

$\tau_{max}$  es el esfuerzo cortante máximo

La distancia  $z$  puede ser calculada por:

$$z = 0.78a \quad [1.30]$$

donde:

$a$  es el radio del área de contacto

$z$  es la distancia por debajo del área de contacto donde se generarán los esfuerzos cortantes máximos

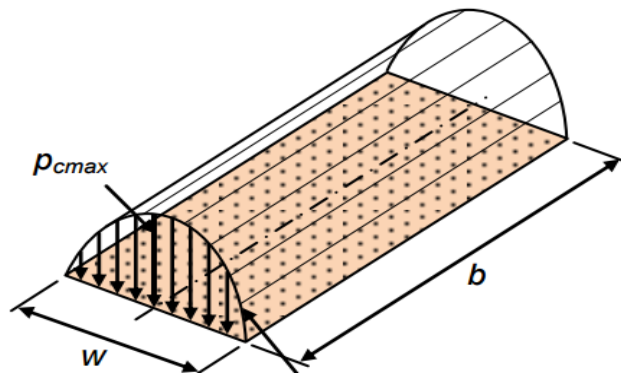


Figura 1.10 Distribución de esfuerzos por el contacto de dos cilindros paralelos donde  $b$  es la longitud del cilindro y  $w$  es el diámetro del área de contacto.



➤ **Contacto entre un indentador cónico y un semiespacio elástico**

En el caso del hundimiento de un indentador cónico sobre un semiespacio elástico (ver figura 1.11), la profundidad de la hendidura y el radio de contacto se relacionan con la siguiente ecuación:

$$d = \frac{\pi}{2} a \tan \theta \quad [1.31]$$

donde:

$\theta$  es el ángulo que se forma entre el plano horizontal y la superficie lateral del cono

$a$  es el radio del área de contacto

$d$  es la profundidad del área de contacto

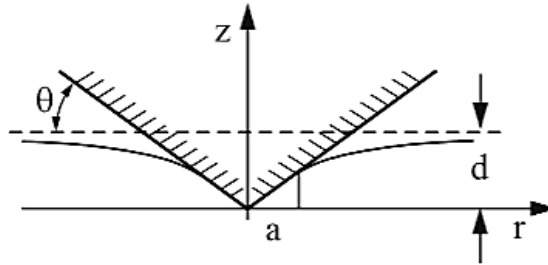


Figura 1.11 Contacto entre un cono y un semiespacio elástico, donde se aprecian los parámetros principales a calcular (Popov, 2010).

La distribución de presiones con respecto al radio  $r$  (ver figura 1.12) se da a partir de la siguiente ecuación:

$$P(r) = \frac{Ed}{\pi a(1-\nu^2)} \ln \left( \frac{a}{r} + \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1} \right) \quad [1.32]$$

donde:

$E$  es el módulo de Young

$a$  es el radio del área de contacto

$\nu$  es la constante de Poisson

$d$  es la profundidad del área de contacto

La fuerza total puede ser calculada por:

$$F = \frac{2}{\pi} E \frac{d^2}{\tan \theta} \quad [1.33]$$

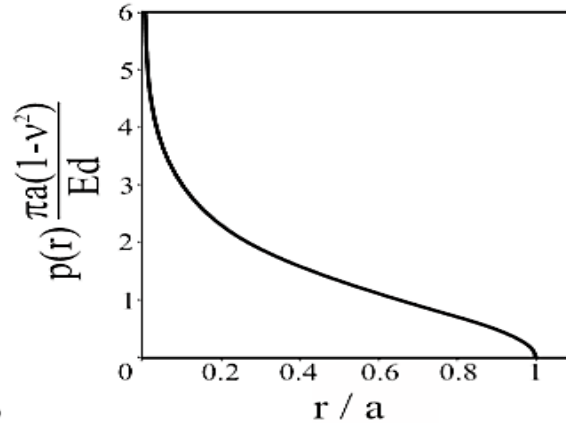


Figura 1.12 Distribución de esfuerzos de una hendidura cónica en contacto con un semiespacio donde el eje horizontal representa el radio del contacto y eje vertical representa la presión (Johnson, 1985).

### 1.1.2 Contacto no Hertziano

El contacto no hertziano analiza el contacto entre superficies conformes llamado también contacto superficial, en el cual en la mayoría de los casos se presentan altas concentraciones de esfuerzos en lugares determinados.

#### ➤ *Contacto superficial*

Para este caso, una superficie es presionada o se le aplica una fuerza sobre un semiespacio elástico (figura 1.13) creando así una distribución de presiones (ver figura 1.14) que dependen de un radio  $r$  y se calcula con la siguiente ecuación:

$$P(x) = \frac{F}{\pi(a^2 - x^2)^{1/2}} \quad [1.34]$$

donde:

$F$  es la fuerza normal aplicada

$a$  es la mitad del ancho de la superficie en contacto

$x$  es el radio al cual queremos conocer la presión, este varía de 0 hasta  $a$

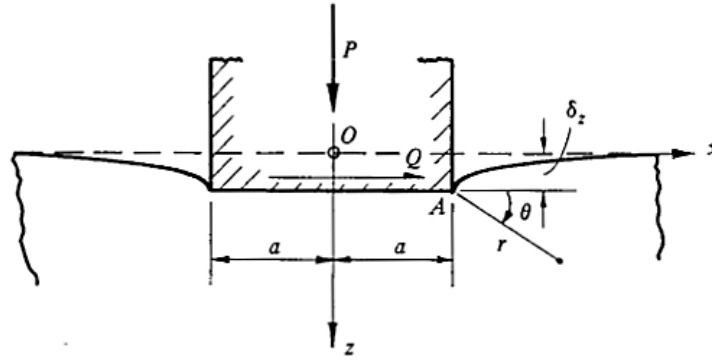


Figura 1.13 Contacto entre dos superficies lisas en el cual se aprecian los parámetros principales a calcular (Johnson, 1985).

Para calcular la profundidad del área de contacto y el esfuerzo cortante principal se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$u_z(x) = \delta_z - \frac{2(1-\nu^2)F}{\pi E} \ln \left\{ \frac{x}{a} + \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \right\} \quad [1.35]$$

$$\tau = - \frac{F}{2\pi(2ar)^{1/2}} \sin \theta \quad [1.36]$$

donde:

$E$  es el módulo de Young

$\nu$  es la constante de Poisson

$F$  es la fuerza aplicada

$x$  es la distancia a la que queramos conocer la presión  $x$  varía entre 0 y  $a$

$a$  es el radio del cilindro en contacto

$\theta$  y  $r$  son coordenadas polares desde un origen en  $x = a$

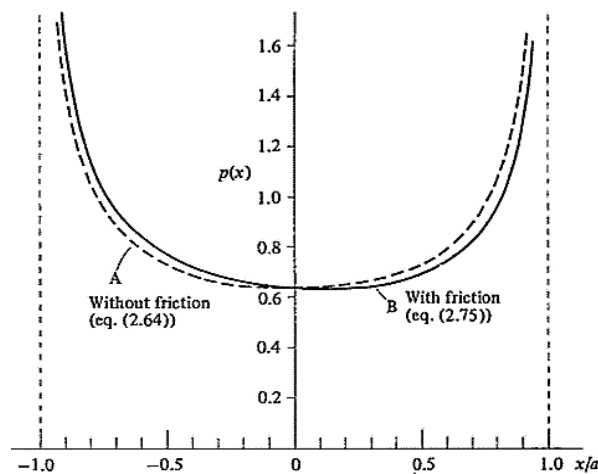


Figura 1.14 Distribución de esfuerzos de contacto entre un cilindro y un semiespacio elástico, estos irán incrementando de 0 hasta  $a$  (Johnson, 1985).

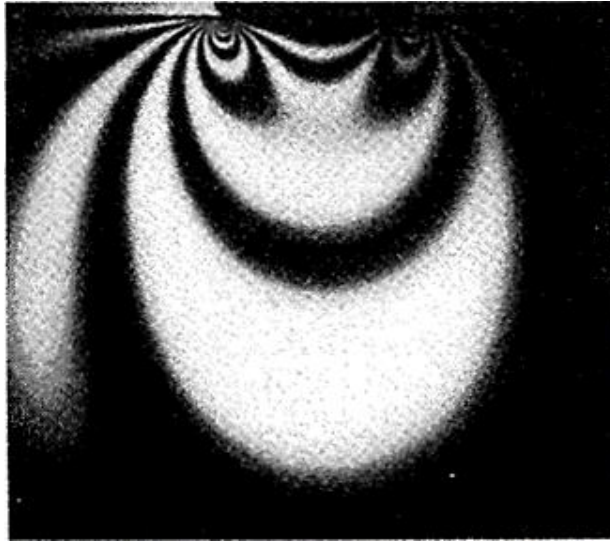


Figura 1.15 Vista foto elástica del contacto superficial donde se aprecia que en los bordes se generan los mayores esfuerzos (Johnson, 1985).

## 1.2 Fricción

La fricción es un fenómeno que se encuentra en todos los sistemas mecánicos ya que con el simple hecho de haber un contacto entre dos objetos, estén o no en movimiento, se genera una fuerza de fricción. La fricción puede ser de muchos casos útil como por ejemplo en la fabricación de amortiguadores para su aplicación en edificios los cuales disipan la energía generada por los temblores y otras aplicaciones más comunes como el calzado que son de uso cotidiano.

Se han desarrollado diferentes modelos de fricción para poder adaptarse a diferentes configuraciones en condiciones de funcionamiento sutilmente diferentes. Dadas las múltiples aplicaciones y varios enfoques analíticos adoptados para afrontar los retos de estas aplicaciones, existen numerosas soluciones propuestas al problema de modelado de la fricción. Estas soluciones pueden clasificarse en cuatro regímenes de fricción aceptados: fricción estática/pre deslizamiento, lubricación límite (deslizamiento a baja velocidad, contacto sólido-sólido), lubricación parcial de fluido (soporte por contacto de aspereza sólida y lubricación por fluido) y lubricación fluida (hidrodinámica) (ver figura 1.16) (Chou, 2004).

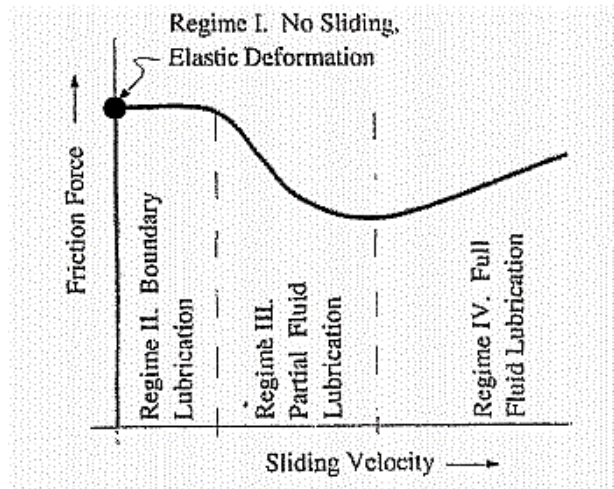


Figura 1.16 Fuerza de fricción – velocidad de deslizamiento (curva de Stribeck) (Chou, 2004).

### 1.2.1 Modelos de fricción estáticos

Los modelos de fricción estáticos analizan principalmente los fenómenos ocurridos previos a empezar el movimiento. Estos modelos se basan principalmente en los estudios realizados por Coulomb que analiza superficies en contacto en las cuales siempre existirá una rugosidad ya que no existen superficies perfectamente lisas.

#### ➤ *Modelo de Coulomb*

Las leyes de fricción seca o de Coulomb (figura 1.18a) analizan los cuerpos que se encuentran en contacto con una superficie común que no se encuentra lubricada, ambas superficies tendrán una fuerza de fricción tangencial que impedirá el movimiento. Generalmente no existen superficies completamente lisas donde no exista fricción, realmente siempre se presentaran fuerzas tangenciales llamadas fuerzas de fricción (ver figura 1.17).

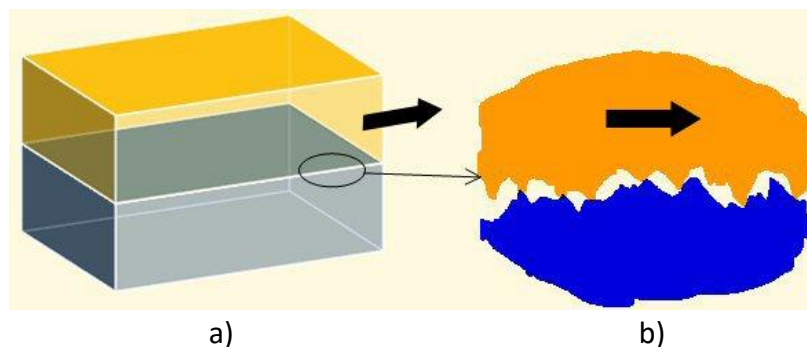


Figura 1.17 Ejemplo de contacto superficial plano, donde: a) cuerpos en contacto, b) imagen microscópica de la zona de contacto donde se pueden ver la rugosidad de los cuerpos.

Las fuerzas tangenciales o de fricción no siempre impedirán el movimiento de un objeto, esto siempre dependerá de la cantidad de fuerza que se le esté aplicando. Generalmente siempre se analizan dos tipos de fricción sobre los cuerpos, la fricción seca o de Coulomb y la fricción de fluidos. La fricción seca como su nombre lo dice, está aislada de cualquier tipo de lubricante y solo analiza superficies en contacto no lubricadas. La fuerza de fricción de Coulomb puede ser calculada con las siguientes ecuaciones (Beer, 2010):

$$F_s = \mu_s N \quad [1.37]$$

$$F_k = \mu_k N \quad [1.38]$$

donde:

$F_s$  es la fuerza de fricción estática

$F_k$  es la fuerza de fricción cinética

$\mu_s$  es el coeficiente de fricción estática

$\mu_k$  es el coeficiente de fricción cinética

$N$  es la fuerza normal ejercida sobre el objeto

#### ➤ **Modelo de stiction**

Experimentalmente se ha observado que la fuerza de fricción en reposo es mayor que la fuerza cinética o la fricción Coulomb. Si el sistema está en adherencia, se necesita una fuerza aplicada externamente que sea igual o mayor que la fuerza de stiction para poner el cuerpo en movimiento, es decir, en deslizamiento.

La fricción estática (stiction) es la fuerza requerida para iniciar el movimiento desde el reposo. Típicamente, la magnitud de la fricción estática es mayor que la magnitud de la fricción de Coulomb que puede conducir al movimiento intermitente conocido como movimiento stick-slip. Se supone que la fricción stiction es independiente de la velocidad, sin embargo varía en función del tiempo de permanencia cuando se pega y de la velocidad de aumento de la fuerza aplicada. Por lo tanto, la fricción en reposo no se puede describir solo como una función de velocidad. En su lugar, tiene que ser capturado en el modelo una fuerza externa  $F_e$  como en la siguiente descripción (Claudiu Iurian, 2005).

$$F = \begin{cases} F_e & \text{si } v = 0 \text{ y } |F_e| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(F_e) & \text{si } v = 0 \text{ y } |F_e| \geq F_s \end{cases} \quad [1.39]$$

donde:

$F_e$  es la fuerza externa aplicada

$F_s$  es la fuerza de fricción stiction

$F$  es la fuerza de fricción

$v$  es la velocidad del objeto

➤ **Modelo de fricción viscosa**

La fricción viscosa (ver figura 1.18b) se genera cuando un objeto se desplaza a través de un fluido por lo tanto se genera una pérdida de energía. La fuerza de fricción viscosa es lineal con respecto a la velocidad y puede ser expresada con la siguiente ecuación:

$$Fv(v) = \sigma_v v \quad [1.40]$$

donde:

$Fv$  es la fuerza de fricción viscosa

$\sigma_v$  es el coeficiente de fricción viscosa

$v$  es la velocidad de los cuerpos en contacto

El efecto Stribeck (ver figura 1.18d) puede expresarse como una función descriptiva de la velocidad y se mantiene en la forma general  $F_s(v)$ . La fuerza de fricción total que incluye los tres efectos se puede expresar como:

$$Ff(v) = \mu F_n \text{sign}(v) + \sigma_v v + F_s(v) \quad [1.41]$$

Comparación de los modelos de fricción estáticos:

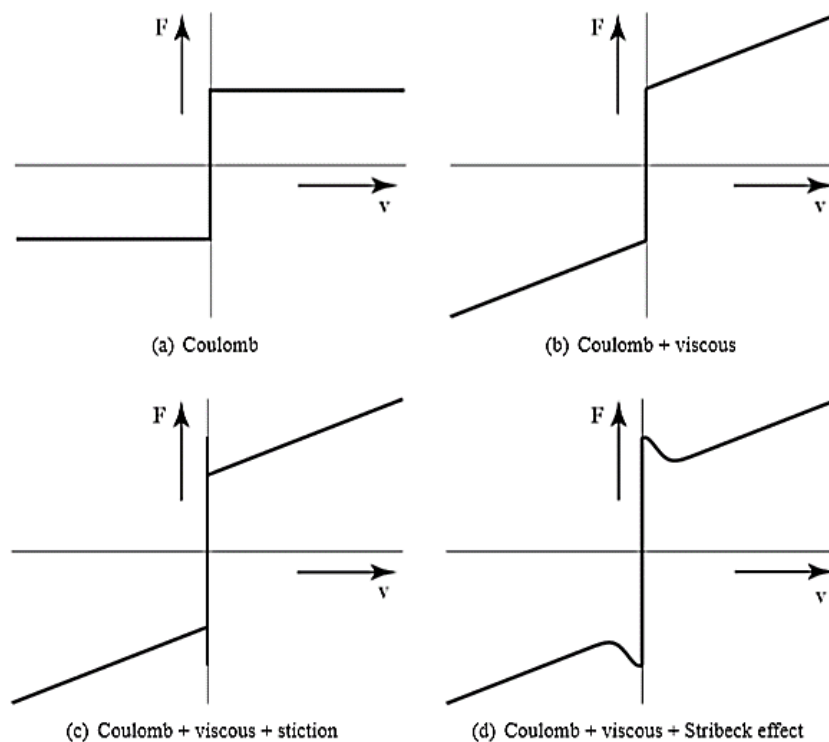


Figura 1.18 Comparación de los modelos de fricción estática (Claudiu Iurian, 2005).

### 1.2.2 Modelos de fricción dinámicos

Los modelos de fricción dinámicos principalmente se enfocan en el análisis de cuerpos o superficies que se encuentran en movimiento, se toman parámetros importantes como la velocidad, el desplazamiento y algunos parámetros extras como microamortiguamiento, microdesplazamiento, rigidez y deflexión de las partículas en contacto.

➤ **Modelo de Dahl**

La teoría de Dahl presenta la analogía que existe entre la fricción y elementos que están expuestos a esfuerzos y deformaciones (figura 1.19). Dahl observó que las partículas de las superficies, al ser expuestas a ciertas fuerzas, se deforman y si estas mismas fuerzas dejan de actuar, las partículas vuelven a tomar su forma original. Dahl comparó el comportamiento de un resorte con el comportamiento que se presenta en la unión de las dos superficies elásticas. Para desplazamientos mayores en la unión surgiría una deformación plástica, esto conlleva a una deformación permanente (Geffen, 2009).

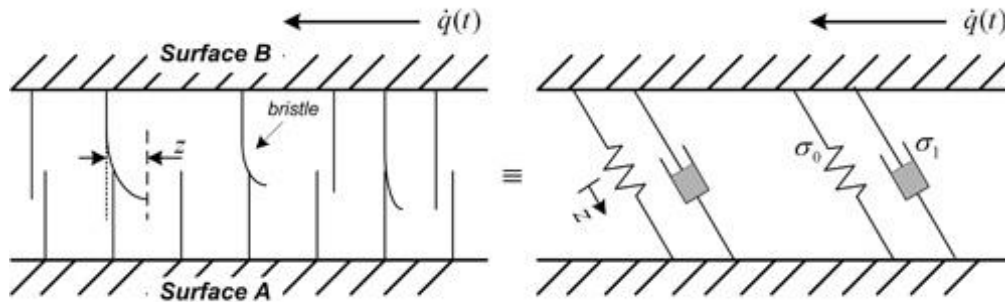


Figura 1.19 Representación del modelo de Dahl donde se representa la superficie como pequeñas cerdas que actúan como resortes (Claudiu Iurian, 2005).

Dahl asumió que la fricción no solo está en función de la velocidad sino que también del desplazamiento. Entonces se tiene la siguiente ecuación (Geffen, 2009):

$$\frac{dF_f(x)}{dx} = \sigma \left| 1 - \frac{F_f}{F_c} \text{sign}(\dot{x}) \right|^n \text{sign} \left( 1 - \frac{F_f}{F_c} \text{sign}(\dot{x}) \right) \quad [1.42]$$

donde:

$\sigma$  es el parámetro de rigidez en el punto de equilibrio

$F_f$  es la fuerza de fricción

$F_c$  es la fuerza de fricción de Coulomb

$n$  es el parámetro dependiente del material varía entre 0 y 1 para materiales frágiles y es mayor o igual a 1 para materiales más dúctiles.



Para el caso más simple donde  $n = 1$  el factor de estabilidad  $\text{sign}\left(1 - \frac{F_f}{F_c} \text{sign}(\dot{x})\right)$  puede ser convertido a 1 según Dahl, lo que resulta (Geffen, 2009):

$$\frac{dF_f(x)}{dx} = \sigma \left(1 - \frac{F_f}{F_c} \text{sign}(\dot{x})\right) \quad [1.43]$$

También se puede escribir como una derivada con respecto al tiempo (Geffen, 2009):

$$\frac{dF_f}{dt} = \frac{dF_f}{dx} * \frac{dx}{dt} = \sigma \dot{x} - \frac{F_f}{F_c} \sigma |\dot{x}| \quad [1.44]$$

Con esta expresión Dahl fue capaz de modelar el pre-desplazamiento e histéresis en un modelo dinámico.

### ➤ **Modelo de LuGre**

Es un modelo que se basa en las consideraciones del modelo de Dahl y también emplea la idea de un pre deslizamiento característico medio, ha sido propuesto por Canudas de Witt donde se presenta como el modelo LuGre. Este modelo combina el modelo Dahl con características arbitrarias de estado estacionario como el efecto Stribeck, sin embargo, la interpretación del estado interno es la del modelo de cerdas, es decir, la fricción se visualiza como fuerzas producidas por las cerdas de flexión que se comportan como resortes, pero en lugar de modelar el comportamiento aleatorio de la fricción se basa en el comportamiento promedio de las cerdas. El modelo LuGre depende de la velocidad. En el modelo de LuGre la fuerza de fricción durante el estiramiento es modelada como la fuerza media aplicada por un conjunto de muelles elásticos bajo un desplazamiento microscópico tangencial.

Una interpretación de estos resortes elásticos se puede dar bajo el supuesto de que las dos superficies móviles están en contacto con un gran número de cerdas con una cierta rigidez. La rigidez de las cerdas y el amortiguamiento microscópico se introducen para modelar el desplazamiento promedio de cerdas con las siguientes ecuaciones (Drincic, 2012):

$$\dot{z} = v - \frac{\sigma_0}{g(v)} z |v| \quad [1.45]$$

$$g(v) = F_c + (F_s - F_c) e^{-(v/v_s)^2} \quad [1.46]$$

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v \quad [1.47]$$

Donde:

$z$  es la deflexión media de las cerdas

$v$  es la velocidad relativa entre los cuerpos en contacto

$\sigma_0$  es la rigidez de las cerdas

$g(v)$  es la función que modela la curva de Stribeck, para velocidades en estado estacionario

$F_c$  es el nivel de fricción de Coulomb

$F_s$  es el nivel de fricción de Stiction

$v_s$  es la velocidad de Stribeck, y determina como varía  $g(v)$  dentro de sus límites  $F_c \leq g(v) \leq F_s - F_c$

$\sigma_2$  es el coeficiente de fricción viscosa

$\sigma_2 v$  es la fricción viscosa, importante solo para altas velocidades

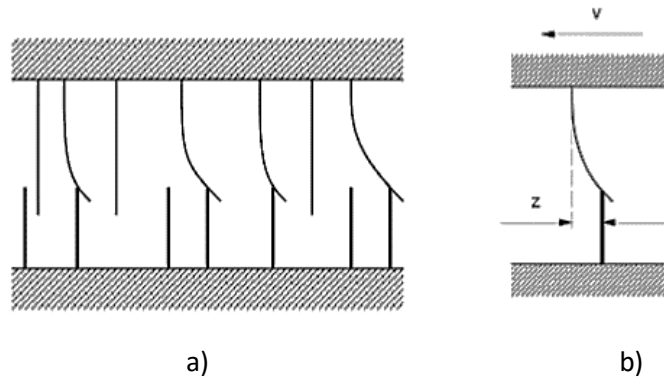


Figura 1.20 Modelo de LuGre donde: a) Modelo esquemático, b) Desplazamiento de las cerdas que dependen de la velocidad (Chou, 2004).

#### ➤ **Modelo Maxwell – Slip**

El modelo Maxwell – Slip consiste en  $N$  masas y  $N$  resortes para  $i = 1 \dots N$  (ver figura 1.21), la masa  $m_i$  con desplazamiento  $x_i$  está conectado por una rigidez  $k_i$  a un punto de terminación común con un desplazamiento  $u$ . Asociado con cada masa se encuentra un desplazamiento en el espacio neutro de anchura  $\Delta_i > 0$ , por debajo del cual la masa se mueve y por encima de la cual la masa no se mueve con una velocidad  $\dot{u}$ , es decir la inercia de las masas se ignora cuando estas se deslizan, por lo tanto la fuerza necesaria del resorte para mover la masa es  $\Delta_i x_i$ , una vez que la masa empieza a moverse esta fuerza se mantiene para todas las velocidades de la masa. Por lo tanto todas las masas en el modelo Maxwell-Slip se someten a una fuerza equivalente de fricción de Coulomb  $F = \Delta_i x_i$  (Drincic, 2012).

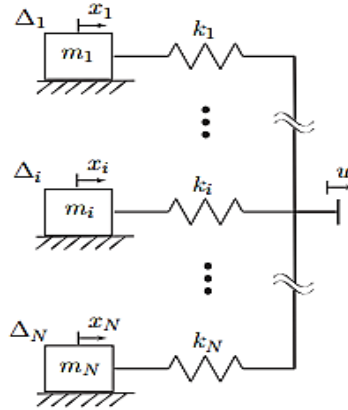


Figura 1.1 Modelo Maxwell – Slip que es representado con N masas y N resortes (Drincic, 2012).

Se puede representar el sistema de masas y resortes con las siguientes ecuaciones (Drincic, 2012):

$$\dot{x}_i(t) = [U(-x_i(t) + u(t) - \Delta i) \quad 1 - U(-x_i(t) + u(t) + \Delta i)] \begin{bmatrix} \dot{u}_+(t) \\ \dot{u}_-(t) \end{bmatrix} \quad [1.48]$$

$$Ff(t) = \sum_{i=1}^N k_i(-x_i(t) + u(t)), \quad i = 1, \dots, N, \quad [1.49]$$

En la cual:

$$U(v) = \begin{cases} 1, & v \geq 0 \\ 0, & v < 0 \end{cases} \quad [1.50]$$

donde:

$Ff$  es la fuerza de fricción

$x_i$  es la deformación del resorte

$k_i$  es la rigidez del resorte

$u$  es el desplazamiento total

$v$  es la velocidad de la superficie

### ➤ **Modelo de Leuven**

El modelo de fricción integrado por Swevers, llamado el modelo de Leuven, es un modelo de fricción más elaborado que el modelo LuGre. La estructura del modelo de Leuven permite un modelado preciso tanto en los regímenes de pre deslizamiento como de deslizamiento sin el uso de una función de conmutación. El modelo incorpora una función de histéresis con memoria no local y curvas de transición arbitrarias. Este modelo puede explicar con precisión las características de fricción obtenidas experimentalmente: efecto Stribeck en el deslizamiento, retraso de fricción, variación de la rotura, comportamiento de deslizamiento y comportamiento histerético en pre deslizamiento. Esta última propiedad no puede ser modelada con el modelo LuGre. El modelo de Leuven también consta de dos ecuaciones: una ecuación de fuerza de fricción y una ecuación de estado no lineal. Utiliza

una variable de estado  $z$  que puede verse como la desviación media de las uniones de aspereza. Para el cálculo de los parámetros se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dz}{dt} = v \left( 1 - \operatorname{sgn} \left( \frac{F_d(z)}{s(v) - F_b} \right) \left| \frac{F_d(z)}{s(v) - F_b} \right|^n \right) \quad [1.51]$$

$$Ff = F_h(z) - \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v \quad [1.52]$$

En el cual:

$$s(v) = \operatorname{sgn}(v) \left( Fc + (Fs - Fc) e^{-\left(\frac{|v|}{V_s}\right)^\delta} \right) \quad [1.53]$$

$$F_h(z) = F_b + F_d(z) \quad [1.54]$$

donde:

$v$  es la velocidad de la superficie

$n$  es el coeficiente utilizado para conformar las curvas de transición

$s(v)$  es una función que modela el comportamiento de la velocidad constante

$F_h(z)$  es la fuerza de histéresis, es decir, la parte de la fuerza de fricción que presenta comportamiento de histéresis con la variable de estado  $z$  como entrada

$F_b$  es el comienzo de una curva de transición a la inversión de la velocidad

$F_d(z)$  es la curva de transición activa en un momento determinado

$\sigma_1$  es el amortiguamiento microscópico

$\sigma_2$  es el coeficiente de fricción viscosa

$\sigma_2 v$  es la fricción viscosa (importante solo para altas velocidades)

$Fc$  es el nivel de fricción de Coulomb

$Fs$  es el nivel de fricción Stiction

$V_s$  es la velocidad de Stribeck y determina como  $g(v)$  varía dentro de sus límites  $Fc \leq g(v) \leq Fs - Fc$

$\delta$  es el factor de forma

### 1.3 Ciclos de histéresis

A partir de las señales obtenidas en pruebas como señales de fuerza, desplazamiento y aceleración en función del tiempo, se grafican las curvas de histéresis (fuerza versus desplazamiento) de fricción seca para calcular la energía disipada por ciclo (área encerrada por el ciclo de histéresis). En el análisis de respuestas dinámicas de estructuras que tienen contacto con fricción, se usan dos tipos de enfoques: los métodos de macro deslizamiento y micro deslizamiento (ver figura 1.22). Por su simplicidad matemática, el enfoque macro deslizamiento es ampliamente utilizado, en el cual la interfaz de fricción es modelada como un cuerpo rígido en los estados de deslizamiento o adherencia. Este método es aceptable si el deslizamiento-grueso ocurre en la interfaz de fricción, el cual es posible si la carga normal que actúa sobre la interfaz es pequeña. Por otro lado el método de micro deslizamiento es matemáticamente complicado; sin embargo, desde la interfaz de fricción,

es modelado como un cuerpo elástico y es capaz de representar deslizamiento parcial, el cual ocurre si la carga normal que actúa sobre la interfaz es grande (Contreras, 2009).

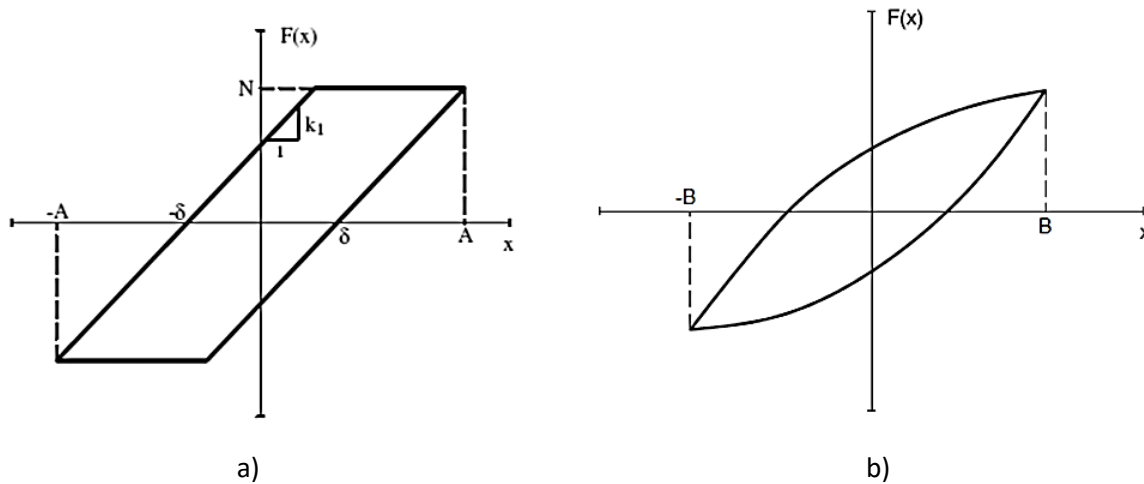


Figura 1.22 Ciclos de histéresis donde a) Para un modelo de macro deslizamiento, b) Para un modelo de micro deslizamiento (Contreras, 2009).

El amortiguamiento por histéresis, también conocido como amortiguamiento del material, produce una fuerza que se encuentra en fase con la velocidad, pero es proporcional al desplazamiento. Éste es el tipo de amortiguamiento se encuentra en los materiales sólidos, como los elastómeros, que se utilizan ampliamente para el control del ruido. El enfoque macro asume una fuerza disipativa única actuando en la interfaz entre las superficies de deslizamiento. Este enfoque es frecuentemente descrito como un modelo de fricción estático. El enfoque micro toma en cuenta un conocimiento detallado de las características de las superficies deslizando, e incluye: rugosidad, asperezas, fenómeno de adhesión, histéresis de fricción, límite de ciclos, lubricación de la superficie y otros parámetros tribológicos, etc. Este enfoque es frecuentemente usado en los llamados modelos dinámicos.

Los contactos de estructuras vibrando, están sujetas a un movimiento relativo oscilatorio, sus características son esencialmente descritas por sus ciclos de histéresis, que muestran cómo la fuerza tangencial varía con el desplazamiento relativo. El micro deslizamiento se refiere a la parte del ciclo de histéresis entre adherencia y deslizamiento donde la fuerza tangencial queda en función del desplazamiento relativo. Durante micro deslizamiento, el deslizamiento toma lugar solamente entre las partes de la superficie de contacto, mientras las otras partes no están sometidas a algún movimiento relativo. La rigidez tangencial de contacto es la pendiente inicial del ciclo de histéresis después de un cambio de movimiento. El deslizamiento burdo, se refiere a la parte del ciclo de histéresis donde el deslizamiento toma lugar entre todos los puntos de la superficie de contacto e idealmente la fuerza tangencial es independiente del desplazamiento relativo. Las fuerzas de contacto dependen de las propiedades, superficies y geometrías del material, la velocidad relativa y

desplazamiento, temperatura local, adherencia, fusión a puntos locales de contacto, deformación plástica y elástica, desgaste, oxidación, lubricación, rigidez de contacto de las piezas e historia del contacto. Dependiendo de la aplicación se debe de tomar en cuenta una selección de estos factores

(Fillipi 2004) diseñó un sistema de medición para medir las fuerzas de contacto tangenciales y desplazamientos entre dos superficies para un amplio rango de amplitudes de desplazamiento y cargas normales. Utilizaron diferentes pares de materiales para realizar las pruebas. Para cada par de contacto, los ciclos de histéresis fueron medidos para diferentes cargas normales y amplitudes de desplazamiento. La rigidez tangencial de contacto fue calculada a partir de ciclos de histéresis y presentaron la variación de los mismos con respecto a la carga normal. Los valores de rigidez equivalente de contacto fueron calculados para cada ciclo de histéresis y presentados como una función de amplitud de desplazamiento relativo. Este sistema permitió medir los ciclos de histéresis en régimen micro-deslizamiento y deslizamiento burdo; los resultados obtenidos les permitieron la determinación de parámetros de interés para el diseño de amortiguadores de álabes de turbina, el coeficiente de fricción, la rigidez de contacto tangencial y una equivalente rigidez compleja de contacto.

[Cigeroglu y Özgüven 2006] propusieron un modelo de fricción de dos pendientes. El macro deslizamiento es un enfoque ampliamente utilizado en el cual la superficie entera de fricción se asume para tener deslizamiento o adherencia. Este uso extensivo se debe a su simplicidad matemática y la exactitud de predecir respuestas para pequeñas cargas normales. En el enfoque de micro deslizamiento es llevado a cabo un análisis detallado de distribución de esfuerzos en la interfaz de fricción, por lo tanto, el modelo de micro deslizamiento puede proporcionar resultados más precisos, sin embargo, este requiere un esfuerzo computacional más alto. El modelo de histéresis que presentan [Cigeroglu y Özgüven 2006], puede ser considerado como una extensión del modelo de macro deslizamiento; aún este modelo se puede representar aproximadamente como un comportamiento de micro deslizamiento (ver figura 1.23) (Contreras, 2009).

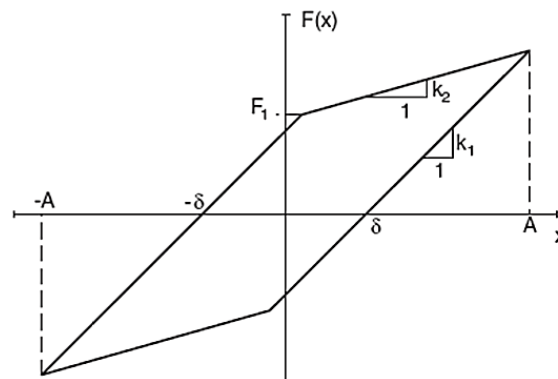


Figura 1.23 Curva de histéresis propuesta por Cigeroglu y Ozguven de dos pendientes que se aproxima al micro deslizamiento (Contreras, 2009).

La curva de histéresis tiene dos pendientes en lugar de una; sin embargo, dos pendientes hacen posible representar aproximadamente las características de micro deslizamiento (ver figura 1.24). Es posible calcular el modelo de macro deslizamiento, describiendo funciones analíticamente, forzándola a una combinación de funciones lineales. Sin embargo, el modelo de micro deslizamiento es expresado en términos de funciones más complicadas, para las cuales no pueden ser evaluadas analíticamente. Por lo tanto el orden para obtener las funciones discretizadas requiere el empleo de técnicas de integración numéricas, las cuales incrementan el tiempo de computación considerablemente. Por otro lado, las curvas de histéresis de dos pendientes propuestas aquí son una combinación de funciones lineales y por lo tanto es posible obtener expresiones analíticas para la función planteada (Contreras, 2009).

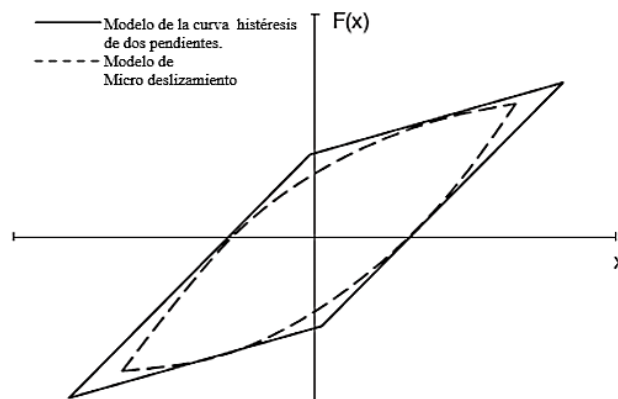


Figura 1.24 Comparación de la curva de histéresis entre el modelo de dos pendientes y el modelo de micro deslizamiento (Calderón, 2009).

Diferentes modelos de contacto han sido revisados en términos de su eficiencia para predecir la histéresis que se genera para pequeños desplazamientos relativos. Se considera el modelo de Cattaneo-Mindlin por la capacidad de predecir el comportamiento de micro deslizamiento como una función de las propiedades del material, geometría de contacto y cargas aplicadas. La histéresis de contacto es determinada experimentalmente para diferentes pares de materiales de contacto, un amplio rango de cargas normales y amplitudes de desplazamiento relativo. Los resultados experimentales concuerdan con el modelo de Cattaneo-Mindlin, pero se encontraron algunas significativas discrepancias. El desgaste de la superficie incrementa la rigidez tangencial de contacto. Algunos pares de contacto muestran claramente que la curva de micro deslizamiento depende de la historia previa de contacto, esto es, si el contacto ha sido desgastado con pequeños desplazamientos relativos (micro deslizamientos) o grandes desplazamientos (burdo deslizamiento) (Contreras, 2009).

## 1.4 Amortiguadores por fricción variable

Los amortiguadores por fricción son dispositivos mecánicos sumamente importantes en el área de estructuras y construcción de edificios ya que son capaces de disipar la energía de los terremotos y evitar que los edificios colapsen. Este tipo de amortiguadores trabajan con el principio de fricción, deformación y rigidez. Claramente este tipo de amortiguadores tienen, desventajas las cuales se han ido mejorando con el paso del tiempo hasta llegar al punto de ser indispensables en cualquier tipo de construcción. A continuación se analizan algunos tipos de amortiguadores por fricción existentes, sus características, funcionamiento y los ciclos de histéresis.

### 1.4.1 Sistema de restricción de disipación de energía (EDR)

Basado en un amortiguador de fricción normal con ciclo rectangular de histéresis, introducido por primera vez por Sumitomo Company en Japón (ver figura 1.25). A través de ciertos refinamientos se encontró que el EDR se puede remoldar como un dispositivo de disipación de energía de fricción pasiva que puede proporcionar varios comportamientos histéricos tales como modos triangulares, de doble capa y rectangulares.

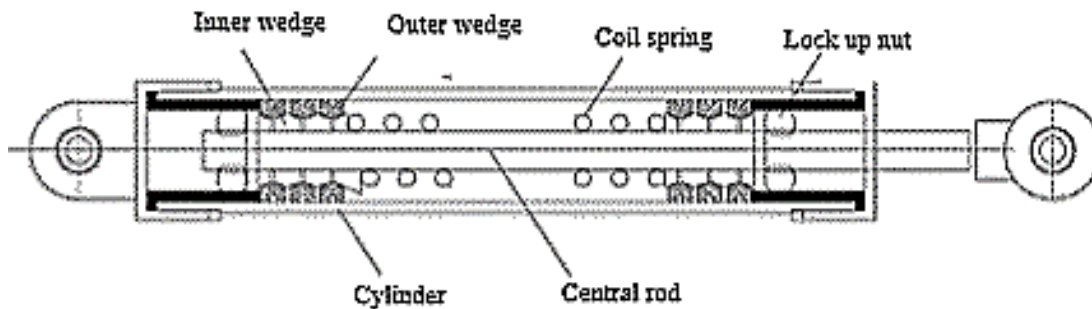


Figura 1.25 Configuración del EDR (Zhou Xiyuan, 2009).

Las modalidades triangulares y dobles histéricas tienen algunas características que no se observaron en los dispositivos normales de disipación de energía tales como amortiguadores metálicos, amortiguadores de fricción Pall, etc. En primer lugar, la fuerza restauradora del modo histérico triangular es proporcional a la deformación del muelle. En segundo lugar, dos modos histéricos se autocentralizan, es decir, mientras se descarga a cero, el dispositivo volverá a su posición inicial sin deformación residual. Además, el elemento con comportamiento histérico triangular puede proporcionar un tipo de control pasivo que es similar al control del sistema de rigidez variable activo (AVS), pero mucho más simple que el control en línea semiactivo a través de la computadora (Zhou Xiyuan, 2009).



Por lo tanto, este tipo de amortiguador se prefiere para el uso en estructuras de ingeniería como un reemplazo para el AVS. Sin embargo, de acuerdo con las pruebas de mesa de agitación llevadas a cabo por Nims y Kelly, la fuerza de salida máxima es de sólo 3 kN.

La configuración se muestra en la Fig. 1.25, y la curva histerética esperada se muestra en la Fig. 1.30. Mediante el ajuste de la fuerza de pre-compresión del muelle y los espacios entre la tuerca y los tapones, este dispositivo puede producir diferentes comportamientos histeréticos. La cuña exterior (cuña de fricción) está hecha de bronce y el cilindro es de acero. La fuerza máxima es de 35 kN y la deformación máxima es de 35 mm. Las Figuras 1.26 - 1.29 muestran los ciclos de histéresis de los experimentos. La Figura 1.27 es el resultado de 0,5 Hz de frecuencia de carga y los otros tres son todos de 0,1 Hz, en los que  $k_1$ ,  $k_3$  representan rigidez de carga y rigidez de descarga, respectivamente;  $K_2$  representa la rigidez de transición entre la etapa de carga y descarga y  $f_y$  representa la carga de deslizamiento de los modos de doble capa y rectangular (Zhou Xiyuan, 2009).

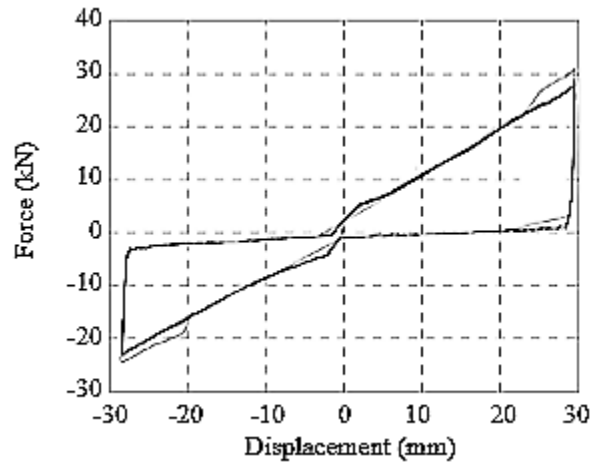


Figura 1.26 Gráfica del ciclo de histéresis triangular para un EDR (Zhou Xiyuan, 2009).

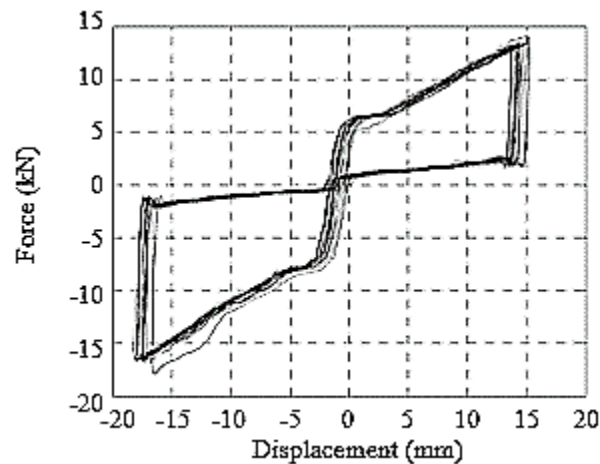


Figura 1.27 Ciclo histerético de doble capa (Zhou Xiyuan, 2009).

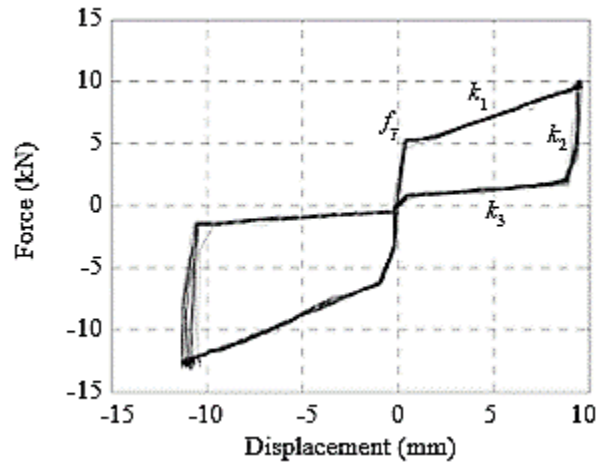


Figura 1.28 Ciclo de histéresis de doble capa (Zhou Xiyuan, 2009).

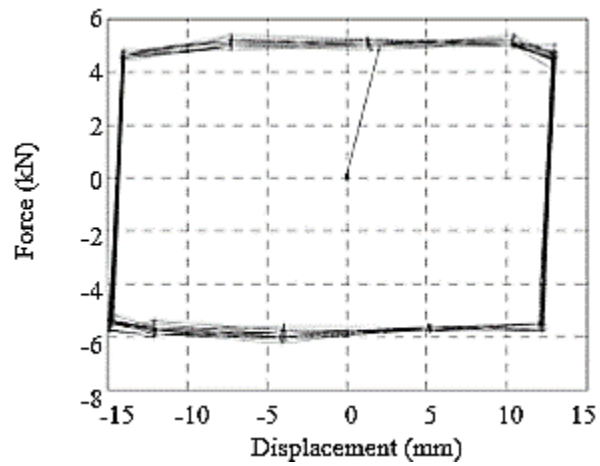


Figura 1.29 Ciclo histérico rectangular (Zhou Xiyuan, 2009).

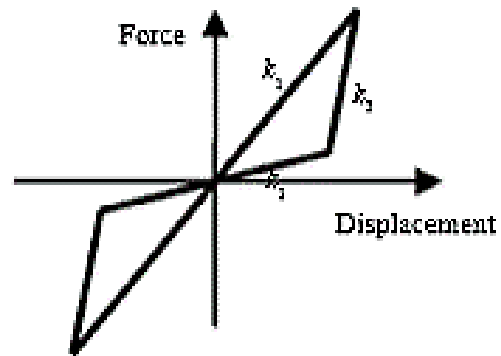


Figura 1.30 Curva histérica esperada del EDR (Zhou Xiyuan, 2009).

### 1.4.2 Nuevo amortiguador de fricción variable

El amortiguador de fricción variable propuesto incluye un cilindro, un eje móvil y un anillo de fricción o un tubo corto que está fijado en el eje (el eje deslizante y el anillo de fricción están conectados como un cuerpo entero) y el contacto con la pared interior del cilindro es a través de una superficie de fricción prescrita como se muestran en las Figura 1.31 – 1.33

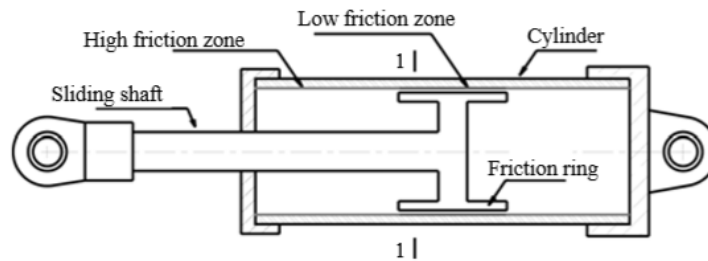


Figura 1.31 Configuración del nuevo amortiguador por fricción variable (Zhou Xiyuan, 2009).

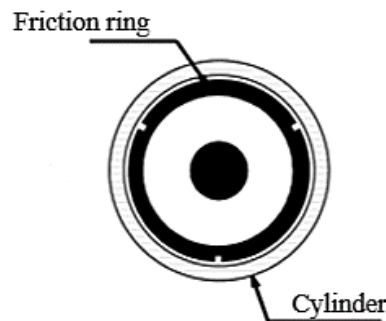


Figura 1.32 Sección transversal del amortiguador 1-1 (Zhou Xiyuan, 2009).

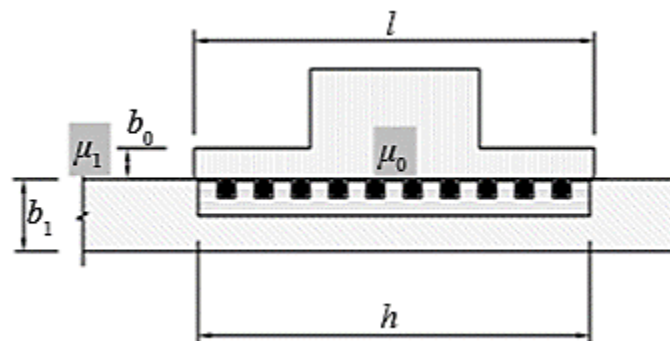


Figura 1.33 Detalle de la superficie de fricción (Zhou Xiyuan, 2009).

El anillo de fricción puede deslizarse a lo largo de la superficie interior del cilindro y produce una fuerza de fricción. El diámetro exterior del anillo de fricción es ligeramente mayor que el diámetro interior del cilindro. Una vez que el anillo de fricción ha sido empujado dentro del cilindro, la tensión de montaje existirá en la superficie de contacto entre el anillo de fricción y el cilindro y dará lugar a resistencia de fricción cuando el eje se desliza a lo largo de la superficie interior del cilindro. De esta manera, tanto el anillo como el cilindro están en un estado de autoestimación que significa que el resorte y las cuñas en el EDR pueden ser retirados y la fuerza radial pretensada se utiliza para producir la fuerza normal necesaria en la superficie de fricción (Zhou Xiyuan, 2009).

En este nuevo tipo de amortiguador de fricción variable, el coeficiente de fricción de la superficie interior del cilindro no es uniforme. Hay una zona de baja fricción en el centro de la superficie interior del cilindro cuyas otras partes están configuradas como una zona de alta fricción como se muestra en la figura 1.33.

La longitud de la zona central de baja fricción es normalmente la misma o ligeramente mayor que el anillo de fricción. Teóricamente, la fuerza de fricción producida es proporcional al desplazamiento del anillo de fricción aparte de su posición original y, por lo tanto, del ciclo histerético triangular como se muestra en la Fig. 1.34 se consigue si se ignora el coeficiente de fricción de la interfase entre el anillo de fricción y la zona de baja fricción del cilindro (Zhou Xiyuan, 2009).

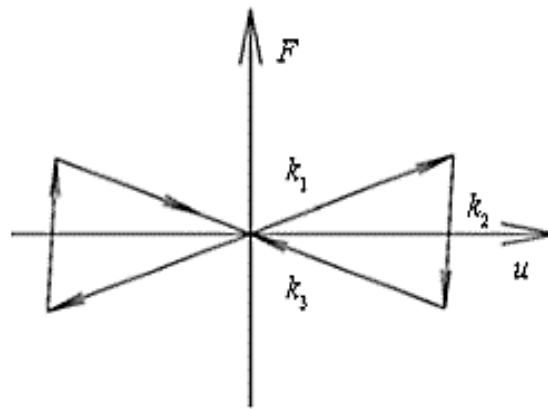


Figura 1.34 Ciclo histerético del nuevo amortiguador de fricción variable (Zhou Xiyuan, 2009).

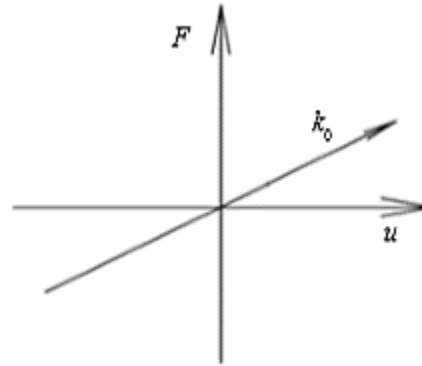


Figura 1.35 Fuerza vs desplazamiento de la estructura (Zhou Xiyuan, 2009).

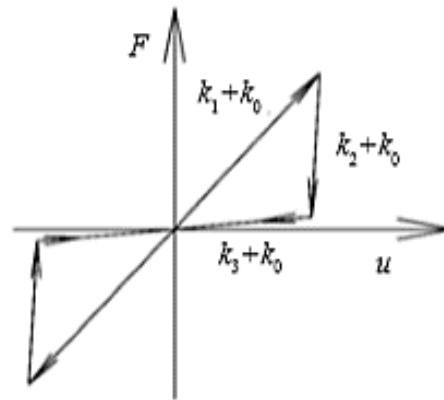


Figura 1.36 Ciclo histerético combinado (Zhou Xiyuan, 2009).

Con el fin de obtener un coeficiente de fricción muy bajo, se usa un cojinete en la zona de baja fricción como se muestra en la figura 1.33; La "l" y la "h" en la figura 1.33 es la longitud del anillo de fricción y la zona de baja fricción del cilindro, respectivamente.  $B_0$  y  $b_1$  representan el espesor del anillo de fricción y del cilindro, respectivamente.  $\mu_1$  y  $\mu_0$  es el coeficiente de fricción de la interfase entre el anillo de fricción y la zona de alta fricción y la zona de baja fricción, respectivamente, suponiendo  $\mu_1 \gg \mu_0$ .

A diferencia del amortiguador de fricción EDR, en el amortiguador variable de fricción propuesto, la fuerza de presión normal depende del esfuerzo de montaje, que puede considerarse aproximadamente constante. La fuerza de fricción aumenta a medida que el desplazamiento del eje y del anillo fijado en él aumenta y alcanza su valor máximo si el anillo de fricción está completamente separado de la zona de baja fricción.

El dispositivo mostrado en la figura 1.31 es un amortiguador típico dependiente del desplazamiento, llamado amortiguador fricción variable. Ambos tipos de amortiguadores (fricción variable y EDR) tienen un rendimiento de carga similar, pero el amortiguador fricción variable no tiene capacidad de recentrado comparado con el EDR modificado, aunque el primero tiene una capacidad de disipación de energía más potente (Zhou Xiyuan, 2009).

### 1.4.3 Amortiguador por fricción de resistencia variable (VRF)

El amortiguador de fricción de resistencia variable (VRF) tipo cortante (figura 1.37 y 1.38) se desarrolló para responder eficazmente a una variedad de movimientos sísmicos para tener diferentes fuerzas de fricción dentro del amortiguador de fricción que tiene una capacidad notable de absorción de energía. Con el fin de evaluar el comportamiento sísmico del amortiguador VRF tipo cortante, se llevaron a cabo ensayos por mesa de agitación. Para estos ensayos se instalaron dos amortiguadores VRF tipo cortante con una fuerza baja de 30 kN y una fuerza mayor de 80 kN a la estructura SDOF y se investigaron las características de su comportamiento dinámico. El resultado de la prueba mostro que el amortiguador VRF existente podría resistir eficazmente tanto a los terremotos pequeños como a los grandes. Además, el resultado de la prueba se compara con el resultado de un análisis numérico en el amortiguador VRF de tipo cortante (Jang Jeong-Hyun, 2012).

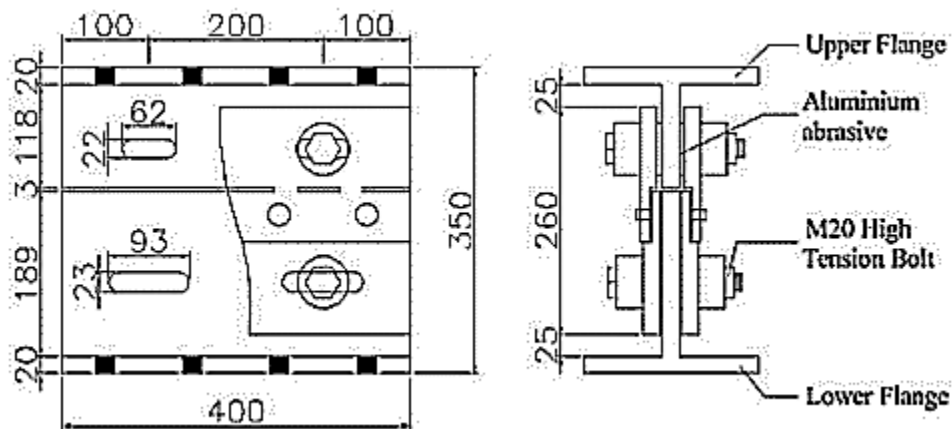


Figura 1.37 Vista frontal y lateral del amortiguador VRF (Jang Jeong-Hyun, 2012).



Figura 1.38 Vista 3D del amortiguador VRF (Jang Jeong-Hyun, 2012).

Los tipos de material y componentes utilizados para el experimento del Amortiguador de Fricción de Resistencia Variable (VRF) son: dos bridas en forma de T (SS400) en la parte superior e inferior, dos parches adicionales (SS400) y cuatro tornillos M20 (F10T). Entre las bridas en forma de T y los parches, se usó como abrasivo de aluminio una placa de aluminio de alta resistencia (Al2017P), que estaba relativamente menos deformada por fricción dependiente de la temperatura. Además, con el fin de limitar la superficie de fricción al espacio entre la brida en forma de T y el abrasivo de aluminio, la trayectoria y el abrasivo de aluminio fueron sometidos a granallado para que la superficie tuviera una aspereza de 50  $\mu\text{m}$  o más, con el fin de garantizar una alta fricción. El abrasivo de aluminio se preparó para tener una parte superior ( $t = 5 \text{ mm}$ : parte de resistencia baja), parte inferior ( $t = 2 \text{ mm}$ : parte de alta resistencia). Como se muestra en la Fig. 1.37, se instaló una ranura con una anchura de 22 mm y una longitud de 62 mm en la brida superior en forma de T de amortiguador VRF y una con la anchura de 22 mm y la longitud de 92 mm en la forma de T inferior, para permitir una deformación máxima de  $\pm 20 \text{ mm}$  para la parte de baja resistencia y  $\pm 35 \text{ mm}$  para la parte de alta resistencia. Con el fin de crear diferentes resistencias de deslizamiento en el amortiguador de fricción de resistencia variable, se introdujo la tensión del perno de 30 kN a cada uno de dos pernos de alta tensión en la parte de baja resistencia y de 80 kN a cada uno de dos pernos de alta tensión en el de alta resistencia. Los tornillos se apretaron con una llave dinamométrica a temperatura ambiente para que pudieran aplicarse la misma fuerza (Jang Jeong-Hyun, 2012).

En este ensayo se calculó el valor medio de las aceleraciones medidas en la parte superior de cada estructura y se multiplicó por el peso de la parte superior de 176,4 kN para calcular la resistencia al deslizamiento del amortiguador. El desplazamiento global del amortiguador se obtuvo utilizando el valor medio de la respuesta de desplazamiento medida en la estructura superior. La figura muestra la relación resistencia deslizante-desplazamiento para cada muestra de ensayo. La rigidez inicial medida a la tensión inicial de 30 kN en el

perno de baja resistencia. Se obtuvo comportamientos de la parte de baja resistencia y de la parte de alta resistencia (aproximadamente 160 kN). La relación entre la resistencia de fricción de deslizamiento  $F$  del amortiguador de fricción y la tensión inicial  $N$  del perno se puede expresar con la siguiente ecuación (Jang Jeong-Hyun, 2012):

$$F = m \cdot \mu \cdot N \quad [1.55]$$

donde:

$F$  es la resistencia al deslizamiento

$m$  es el número de superficies de fricción

$\mu = 0.25$

$N$  es la suma inicial de las tensiones en los pernos

#### 1.4.4 Amortiguador pasivo de fricción variable (VFD)

El sistema VFD es un amortiguador pasivo de fricción variable con características de fuerza de amortiguamiento dependiente del desplazamiento. El amortiguador VFD (figura 1.39 y 1.40) está diseñado para disminuir la fuerza de fricción cuando su desplazamiento excede un valor predeterminado. Esto hace que VFD ideal para la rehabilitación asísmica de rascacielos existentes. Pruebas dinámicas de carga se montaron en un bastidor de acero a escala completa, con el fin de verificar el rendimiento del amortiguador propuesto (K. Shirai, 2013).

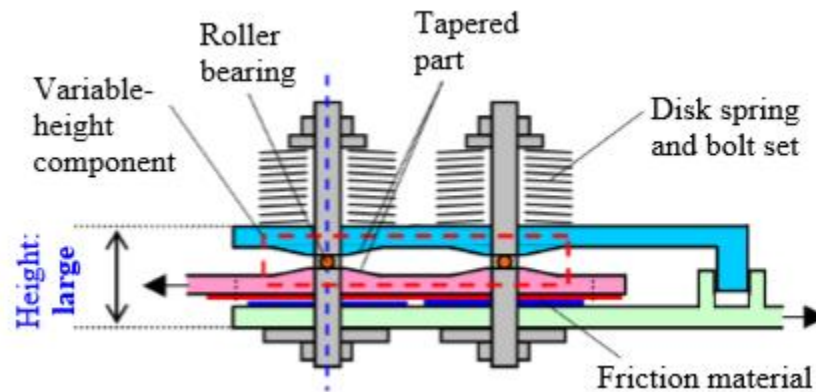


Figura 1.39 Configuración del VFD en un estado neutro (K. Shirai, 2013).



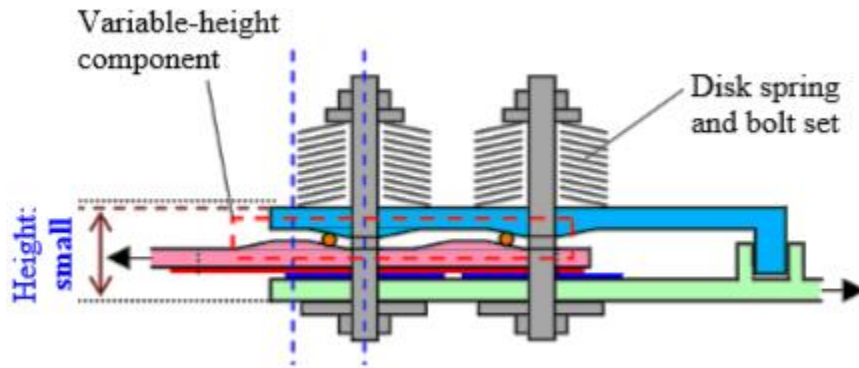


Figura 1.40 Configuración del VFD al momento de la deformación (K. Shirai, 2013).

Se describe las principales características del VFD. Las figuras 1.44 y 1.45 se muestran los diagramas conceptuales del VFD (Shirai et al., 2012) en comparación con un amortiguador de fricción convencional (Sano et al., 2003). Como se muestra en la figura 1.44, el VFD está diseñado para producir una fuerza de rozamiento disminuida cuando su desplazamiento supera un valor predeterminado. Por lo tanto, como se muestra en la figura 1.45, el VFD proporciona al bastidor principal una cantidad relativamente grande de amortiguación que depende del límite de resistencia del bastidor principal, en contraste con el amortiguador de fricción convencional. Esto hace que el VFD sea ideal para la adaptación sísmica de rascacielos existentes (K. Shirai, 2013).

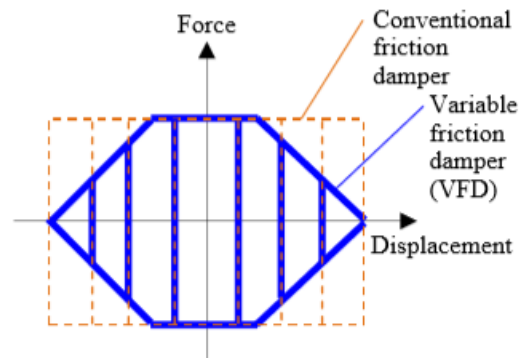


Figura 1.44 Diagrama conceptual de un amortiguador convencional de fricción (K. Shirai, 2013).

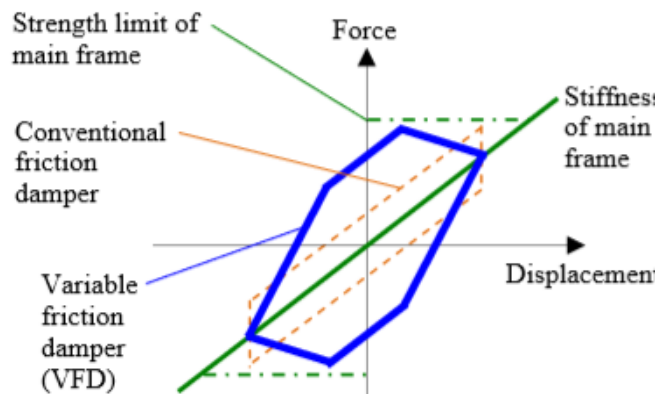


Figura 1. 45 Diagrama conceptual de un VFD (K. Shirai, 2013)

## 1.5 Conclusión

Se llevó a cabo la revisión del marco teórico acerca de la teoría de Hertz de contacto entre dos cuerpos, los distintos modelos de fricción estáticos y dinámicos aplicados en el campo de investigación y conceptos relacionados con los ciclos de histéresis. Por otro lado se hizo un recuento de los diferentes amortiguadores por fricción existentes y se analizaron sus principales características.

Se encontró que el EDR puede generar distintos tipos de ciclos de histéresis cambiando ciertos parámetros en su construcción, sin embargo es un dispositivo sumamente complejo en cuanto a construcción lo cual implicaría un proceso especial para su maquinado y un alto costo. Otra desventaja de este dispositivo es que aun siendo complejo y utilizado para la disipación de energía en edificios solo provoca una fuerza de salida de 3KN lo que lo hace poco eficiente.

Otro amortiguador analizado es el amortiguador de fricción variable, a diferencia del anterior mencionado este su construcción es un poco menos compleja ya que cuenta con menos elementos, uno de sus elementos es un anillo de fricción utilizado comúnmente en estos tipos de amortiguadores y en algunos topes de impacto, una de las desventajas de este elemento es que se requiere de mucha precisión para colocarlo ya que trabaja a presión dentro del dispositivo y cualquier sobrecarga puede provocar que no trabaje de manera adecuada además de que es un dispositivo el cual se ensambla inicialmente a presión esto implica que con el tiempo sufra desgaste y se requieran de ajustes que generen altos costos. Otro de los puntos a tomar en cuenta en este dispositivo es que requiere de dos zonas con distintos coeficientes de fricción para poder trabajar eficientemente lo que implica un constante chequeo en las zonas de contacto para comprobar desgastes y otros parámetros que afecten el funcionamiento.

Por otro lado también se analizó el VRF que es un dispositivo sencillo en su construcción en comparación a los anteriores mencionados, este amortiguador trabaja con dos zonas de resistencia y por lo tanto requiere de distintos materiales especiales que puedan resistir altas temperaturas o ambientes poco hostiles para poder trabajar de manera eficiente.

Por último se analizó el VFD que uno de los amortiguadores por fricción más actuales aunque se adapta idealmente a los diferentes rascacielos, su diseño y construcción es muy complejo lo que lo hace un dispositivo demasiado costoso.

## 2. Descripción del prototipo de amortiguador por fricción y rigidez variable

El diseño del prototipo del amortiguador por fricción y rigidez variable se basa en el principio de funcionamiento de los amortiguadores por fricción utilizados generalmente para la disipación de energía en edificios y rascacielos los cuales son afectados por temblores y terremotos de frecuencias distintas los cuales pueden causar daños severos en las estructuras que a corto o largo plazo estos pueden resultar catastróficos.

El prototipo de amortiguador se muestra en la figura 2.1 el cual consta de una guía lineal la cual no presenta fricción acoplada a una banco de una fresadora (4) (ver figura 2.2); un vástago acoplado a la cuña (6), en esta parte del prototipo es donde se le inducirá una excitación la cual será dada por un excitador electromagnético el cual trabaja a distintas frecuencias. Se diseñaron cuñas intercambiables con distintos ángulos de inclinación las cuales permitirán una disipación de energía distinta ya que dependiendo el ángulo de inclinación de las probetas el desplazamiento entre las probetas cambiara (1). El amortiguador cuenta con vigas de distintos materiales para poder variar la rigidez en el sistema (2), se tienen probetas de contacto puntual de distintos materiales, en este caso se trabaja con probetas hechas de acero A36 (3) y por último se tiene un empotre que está constituido por placas rectangulares, espárragos, arandelas y tuercas (5) (figura 2.3). El prototipo se montara sobre una mesa móvil con tres grados de libertad lo cual se aprovecha para otros tipos de análisis.

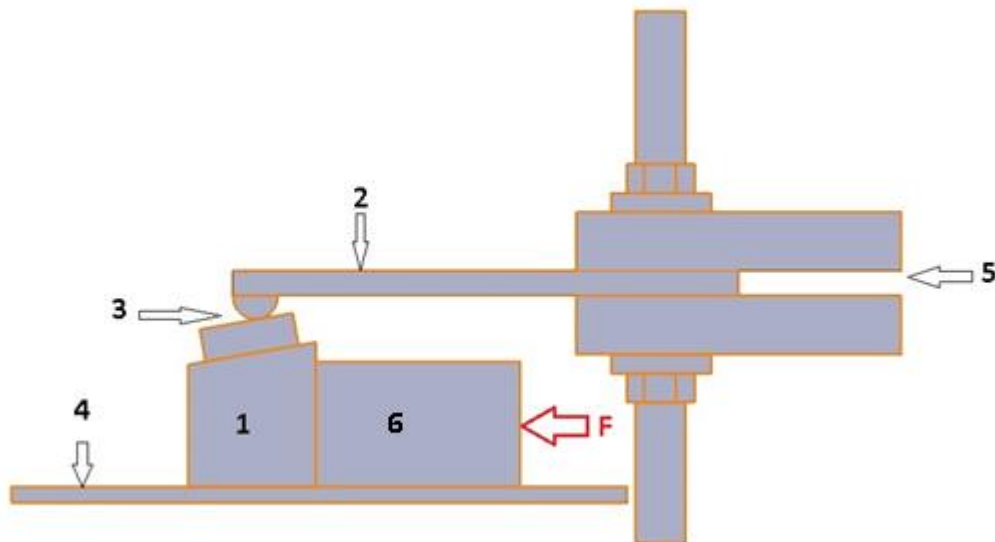


Figura 2.1 Esquema general del prototipo del amortiguador por fricción y rigidez variable

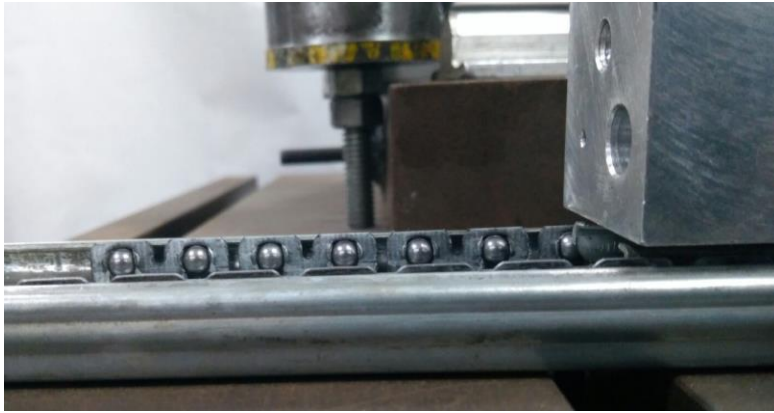
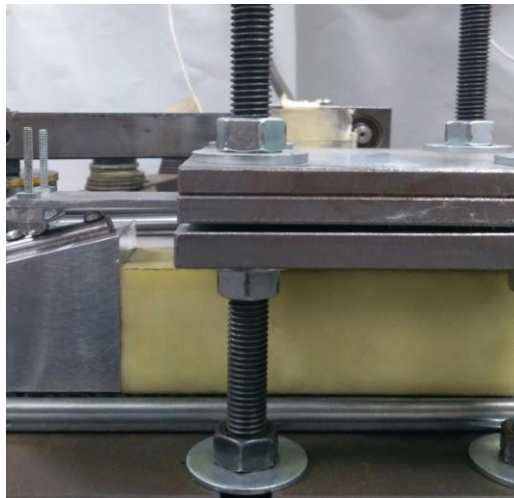


Figura 2.2 Corredera que permite el desplazamiento de la cuña.



2.3 Empotre hecho con placas de acero, espárragos, tuercas y arandelas.

### 2.1 Funcionamiento del amortiguador

El principio de funcionamiento de este amortiguador es la parte de fricción la cual se genera a partir del contacto entre las dos probetas hechas del mismo material (figura 2.4) con un rango del coeficiente de fricción para un contacto puntual determinado en el trabajo de (Castro, 2017) como se muestra en la figura 2.5. Las probetas al tener un ángulo de inclinación relativo como se muestra en la figura 2.6, en la zona de contacto se genera una fuerza de fricción inicialmente nula, la cual aumentara paulatinamente al incrementar el desplazamiento del vástago. La tasa de cambio de la fuerza de fricción dependerá de la rigidez de la viga de fricción y del ángulo de inclinación entre los elementos de contacto.

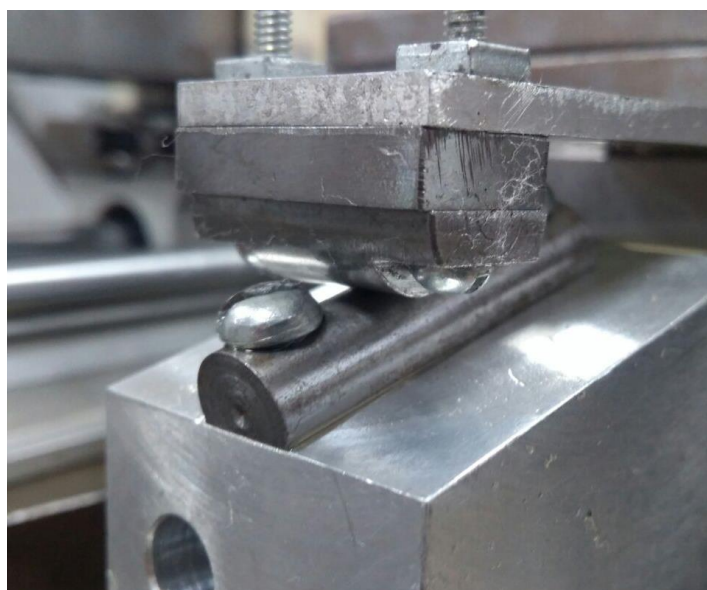


Figura 2.4 Contacto puntual entre las dos probetas de acero.

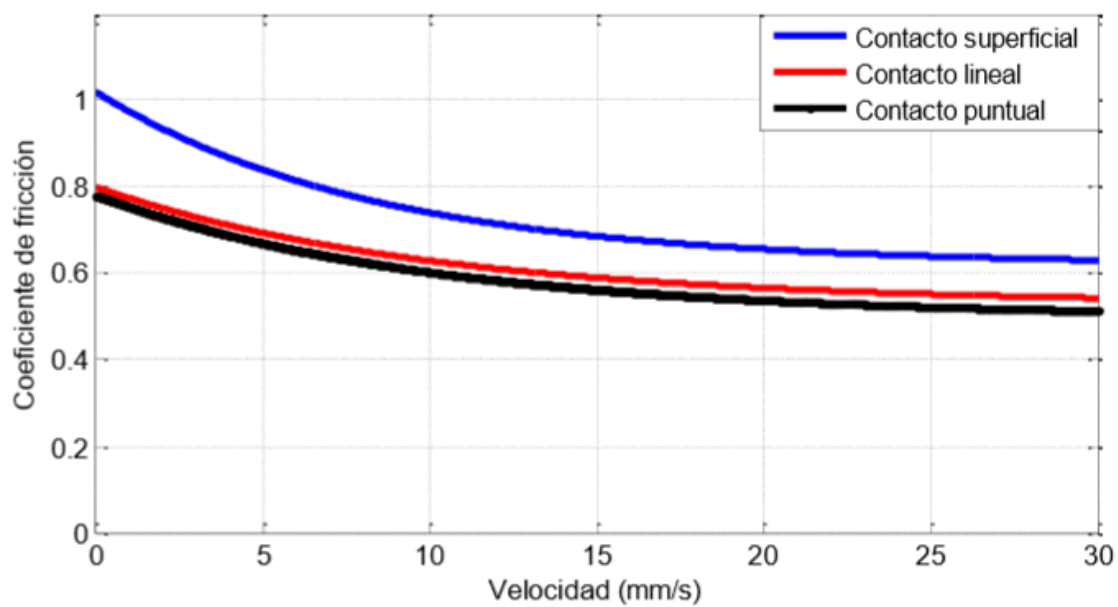


Figura 2.5 Grafica del coeficiente de fricción en contacto acero-acero (Castro, 2017).

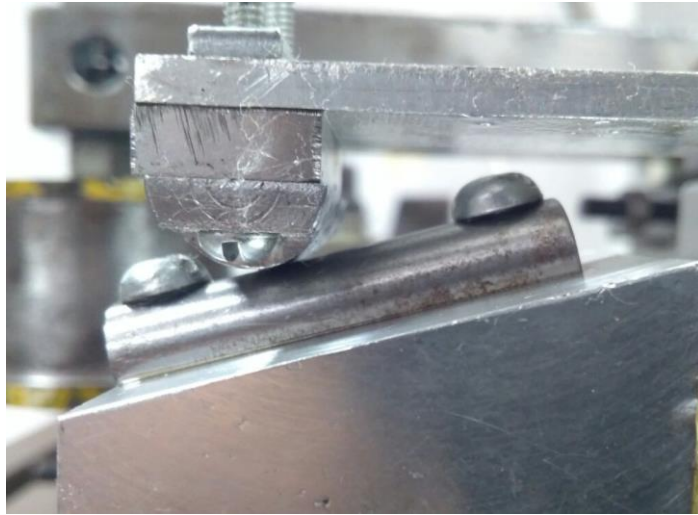


Figura 2.6 Inclinación de la probeta acoplada a la cuña.

Se cuenta con cuñas de distintos ángulos de inclinación (12,14 y 16 grados) (figura 2.7) se puede regular la fuerza de fricción y tener variaciones de la cantidad de energía disipada al igual que al cambiar las probetas a otros materiales como por ejemplo el cobre o bronce y también al cambiar la viga por otras de un material de mayor o menos rigidez (figura 2.8).



Figura 2.7 Cuñas con diferentes ángulos de inclinación.



Figura 2.8 Vigas de diferentes materiales utilizadas para variar la rigidez en el sistema.



El dispositivo funciona mediante la aplicación de una fuerza en una parte del vástago acoplado a la cuña (figura 2.9) en la cual en la parte superior se encuentra acoplada una probeta de acero A36 (figura 2.10) la cual a su vez entrara en contacto con una probeta acoplada en el extremo de la viga de aluminio (figura 2.11) que se encuentra empotrada la cual sufrirá una deformación y esta incrementara al aumentar la fuerza aplicada. La deformación dependerá del material de la viga, el coeficiente de fricción entre las probetas y la fuerza aplicada.

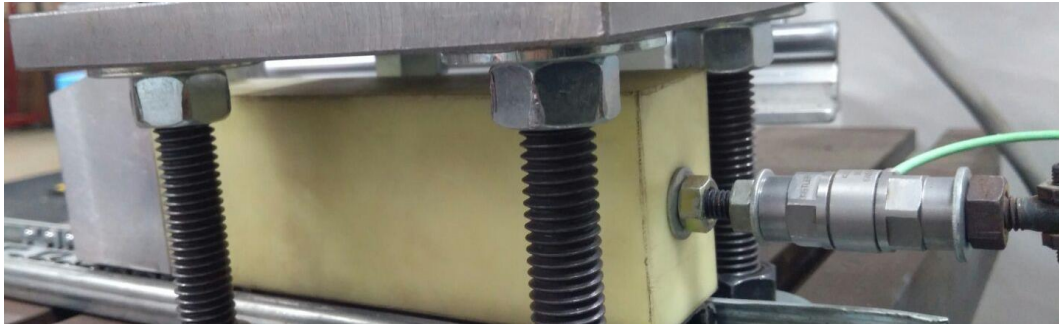


Figura 2.9 Vástago acoplado a la cuña donde se aplica la fuerza de excitación



Figura 2.10 Probeta acoplada en la parte superior de la cuña.



Figura 2.11 Viga en voladizo con una probeta acoplada en el extremo.

El fenómeno generado entre las probetas será una fuerza de fricción cada vez mayor en cuanto el desplazamiento sea mayor y esto será provocado por la fuerza aplicada al sistema y los fenómenos ocurridos en la zona de contacto,, por lo tanto, la energía disipada por el sistema dependerá de la cantidad de fuerza, el coeficiente de fricción entre las probetas y el ángulo de inclinación entre las probetas y la rigidez de la viga.

En la figura 2.12 se muestra una representación de las fuerzas que intervienen en la zona de contacto entre las probetas las cuales se calculan por medio de las ecuaciones de equilibrio y se realiza una comparación con las pruebas experimentales.

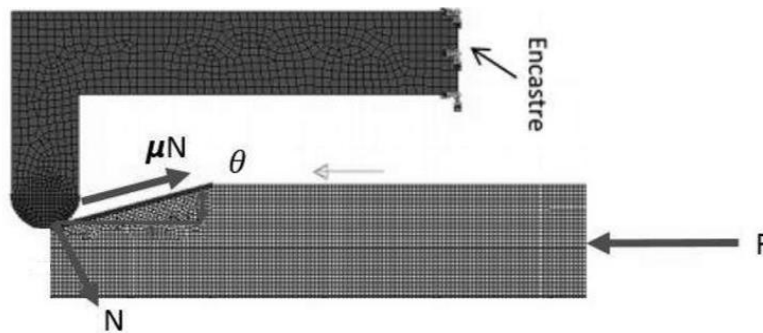


Figura 2.12 Representación de las fuerzas que intervienen en la zona de contacto (F. Castro, 2015).

Para la zona de contacto, se tiene que:

$$\sum F_x = 0 \quad [2.1]$$

$$\mu N \cos \theta + N \sin \theta - F = 0 \quad [2.2]$$

Entonces:

$$N = \frac{F}{(\mu \cos \theta + \sin \theta)} \quad [2.3]$$

Tenemos que:

$$P = N \cos \theta \quad [2.4]$$

Entonces para la viga tenemos que:

$$\delta = \frac{P}{K} \quad [2.5]$$

La rigidez de la viga se obtiene de la siguiente ecuación:

$$K = \frac{3EI}{l^3} \quad [2.6]$$



Se tienen desplazamientos horizontal y vertical entre las probetas respecto al ángulo de inclinación como se muestra en la figura 2.13 donde  $\theta$  es el ángulo de inclinación de la probeta,  $\delta$  es el desplazamiento vertical de la probeta superior y  $dh$  es el desplazamiento horizontal de la cuña los cuales dependen de la fuerza aplicada.

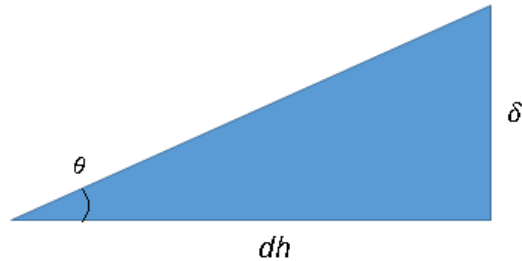


Figura 2.13 Representación de los desplazamientos entre las probetas.

De la figura 2.13 tenemos que:

$$\tan \theta = \frac{\delta}{dh} \quad [5.7]$$

En la cual  $dh$  se obtiene sustituyendo [5.3], [5.4] y [5.5] en [5.7], entonces:

$$dh = \frac{F \cos \theta}{K \tan \theta (\mu \cos \theta + \sin \theta)} \quad [5.8]$$

## 2.2 Especificaciones técnicas del prototipo

En la tabla 2.1 se mencionan los elementos utilizados para el armado del prototipo, material y las dimensiones.

Tabla 2.1 Especificaciones técnicas de los materiales.

Elemento	Material	Dimensiones (mm)
Probeta 1 (Figura 2.14)	Acero	d=9.54, a=30.08
Probeta 2 (Figura 2.15)	Acero	f=13.21, a=25.6, c=4.13
Viga (Figura 2.16)	Aluminio	a=25.45 c=3.24 d=147.49
Cuña (16 grados)(Figura 2.17)	Aluminio	a=48.07 d=42.41 c=60.35 b=35.4
Placas (Figura 2.18)	Acero	d=128.27 a=131.47 b=25.4 c=25.4
Vástago (Figura 2.19)	Nylamid	a=35.65 b=48.68 c=135.84
Espárragos	Acero	25.4
Tuercas	Acero	25.4
Arandelas	Acero	25.4

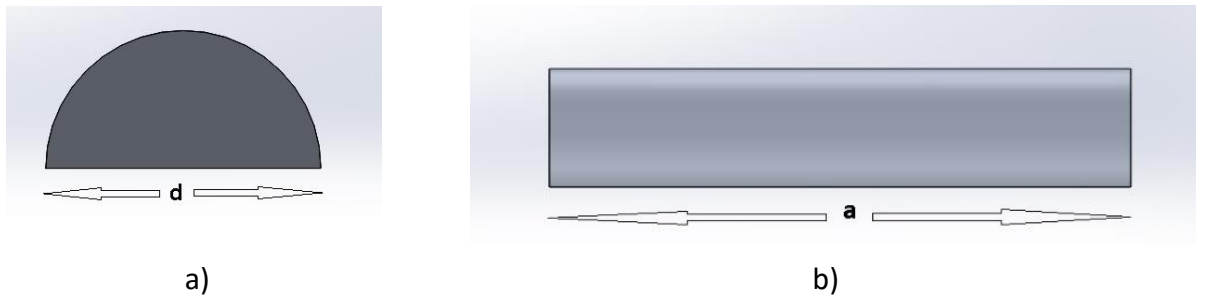


Figura 2.14 Probeta acoplada a la cuña donde a) Sección transversal, b) Longitud.

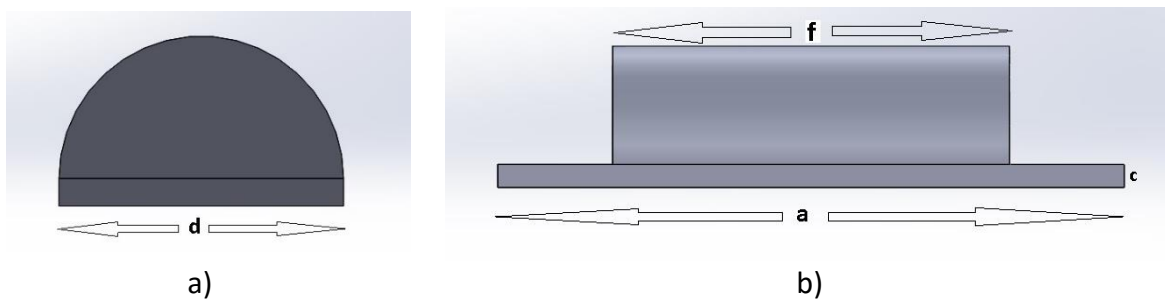


Figura 2.15 Probeta acoplada a la viga donde: a) Sección transversal, b) Longitud y espesor.

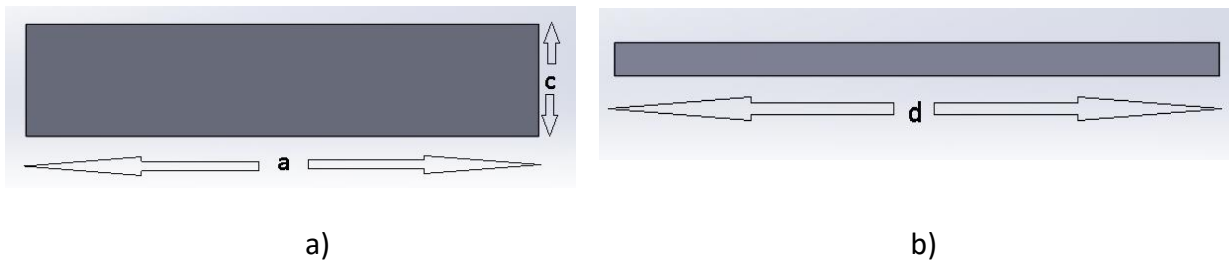


Figura 2.16 Viga de aluminio utilizada donde: a) Sección transversal, b) Longitud.

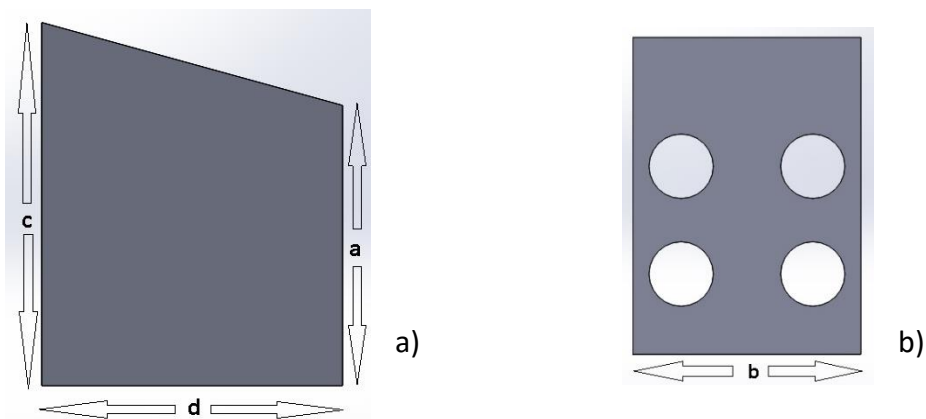


Figura 2.17 Cuña utilizada en las pruebas donde: a) Perfil de la cuña, b) sección transversal.

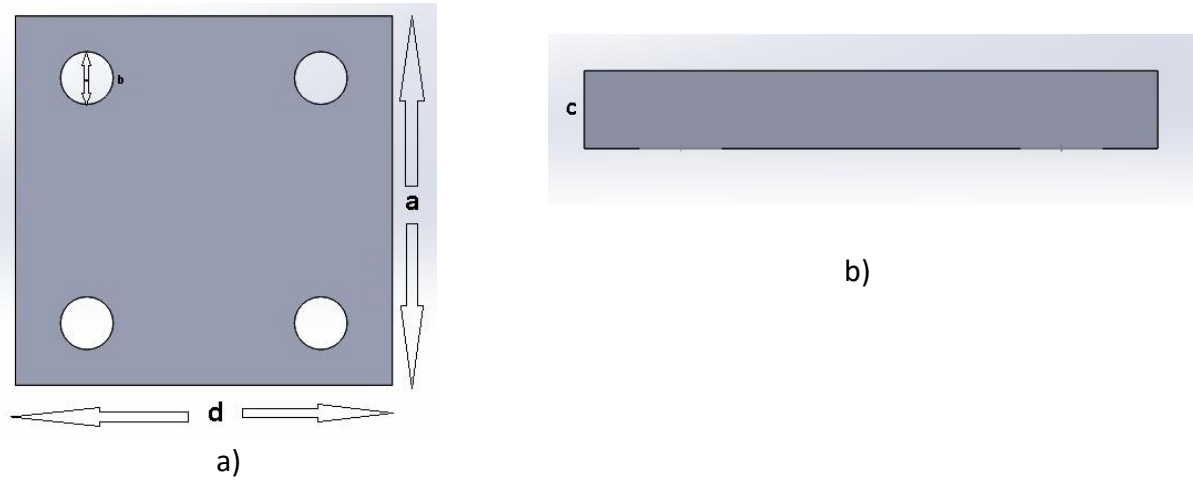


Figura 2.18 Placas utilizadas para hacer el empotre de la viga donde: a) Vista superior de la placa, b) Espesor de la placa.

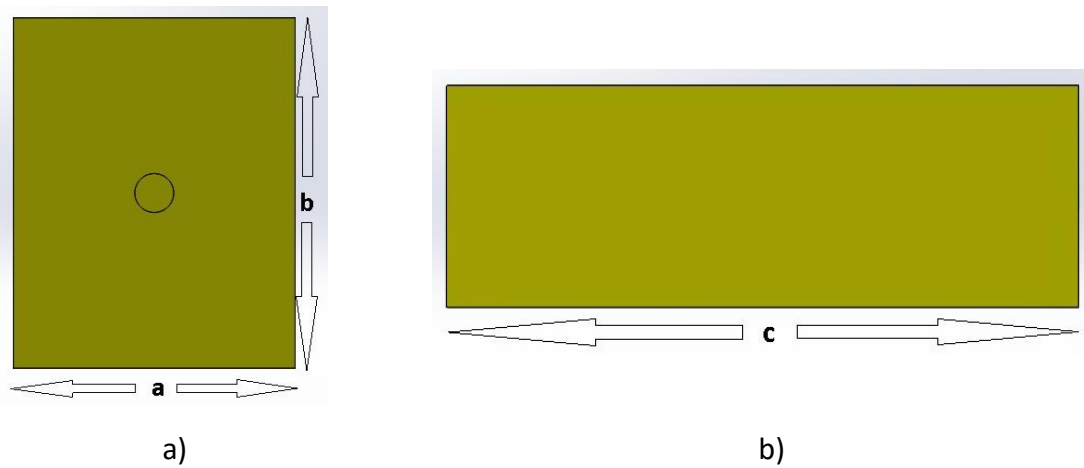


Figura 2.19 Vástago que se acopla la cuña donde: a) Sección transversal, b) Longitud.

En la tabla 2.2 se especifican los aparatos utilizados en las pruebas realizadas.

Tabla 2.2 Aparatos utilizados en las pruebas.

Excitador electromagnético (shaker)
Analizador de señales (HP3566A)
Sensor de desplazamiento PROVIBTECH (TM182)
Sensor de fuerza 9312A
Amplificador de señal Kistler 5118A1
Computadora (HP Vectra 466)
Base magnética Mitutoyo



Figura 2.20 Excitador electromagnético.



Figura 2.21 Computadora HP y analizador.



Figura 2.22 Sensor de desplazamiento



Figura 2.23 Amplificador de señal del sensor



Figura 2.24 Sensor de fuerza 9312A



Figura 2.25 Amplificador de señal Kistler



Figura 2.26 Base magnética

En la figura 2.27 se muestra el diagrama de conexión del prototipo en donde el sensor de fuerza va acoplado al vástago del prototipo y el sensor de desplazamiento es colocado en la parte frontal de la cuña. Cada sensor va conectado a su amplificador correspondiente, estos a su vez se conectan al analizador de señales el cual arroja los resultados por medio de la computadora HP en donde pueden ser tratados y guardados los datos.

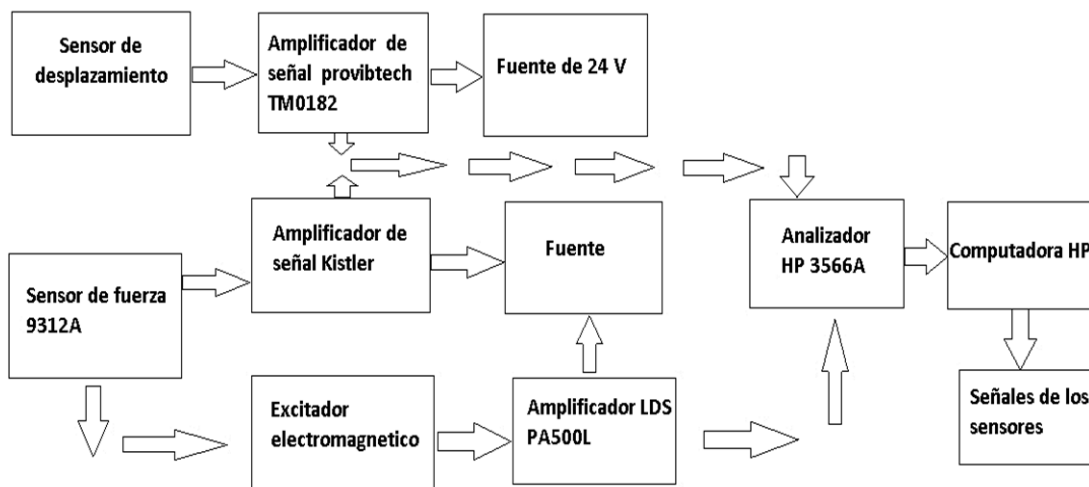


Figura 2.27 Diagrama de conexión del prototipo.

### 3. Análisis estático del prototipo de amortiguador por fricción

En el análisis estático del amortiguador por fricción se busca obtener la rigidez del sistema midiendo los desplazamientos horizontales generados mediante la aplicación de una fuerza estática determinada sobre la cuña, la fuerza se aplica con una velocidad de carga mínima aplicando pesos muertos conocidos para evitar algún tipo de impacto que pueda provocar una variación del desplazamiento. Los resultados obtenidos de las pruebas experimentales se comparan con los cálculos analíticos.

Para las pruebas experimentales estáticas se utilizaron diferentes masas calibradas (ver figura 3.1) las cuales mediante un tornillo y un cable (ver figura 3.2) se acopla en una de las caras laterales de la cuña (ver figura 3.3), se apoya con una polea pequeña (figura 3.4) para poder aplicar la fuerza de manera moderada sobre la cuña.



Figura 3.1 Masas calibradas usadas en las pruebas estáticas.



a)

b)

Figura 3.2 Elementos para acoplar la masa en la cuña donde: a) Tornillo que se acopla a una de las caras de la cuña, b) Cable.

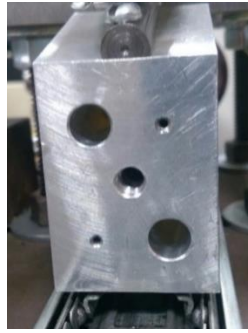


Figura 3.3 Cara de la cuña donde se acopla el tornillo con el cable el cual sostendrá el peso.



Figura 3.4 Polea de apoyo en la cual desciende la carga lentamente.

El la figura 3.5 se muestra una vista frontal a la cara de la cuña en donde se aprecia cómo esta acoplada la masa en la cuña con ayuda de los elementos mencionados anteriormente.

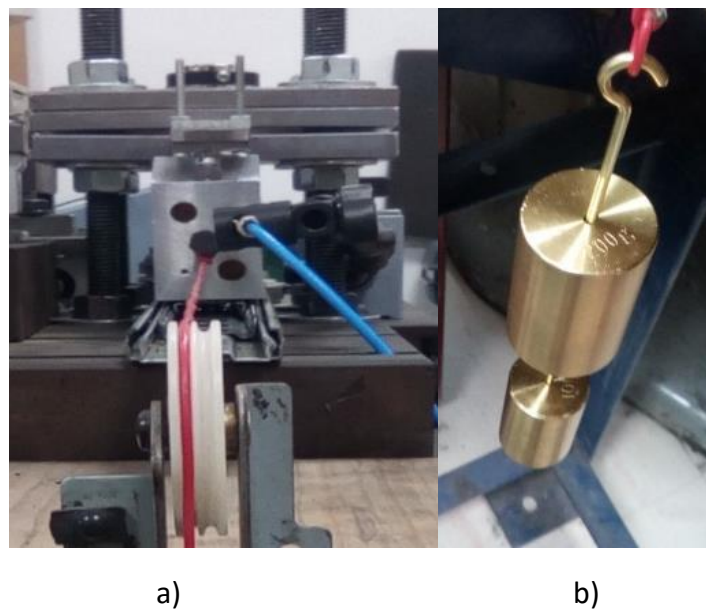


Figura 3.5 a) Vista frontal a la cara de la cuña, b) masa utilizada para las pruebas.

Para la realización de las pruebas estáticas en el prototipo de amortiguador por fricción y rigidez variable se utiliza un sensor de desplazamiento ferromagnético (ver figura 2.22) para la medición de los pequeños desplazamientos provocados por la aplicación de una fuerza de excitación con una velocidad de carga mínima para evitar impactos entre las probetas, también se utiliza un amplificador de señal de baja impedancia (ver figura 2.25) para ampliar la señal arrojada por el sensor y esta señal pueda ser leída por un analizador de señales (ver figura 2.21) el cual proporciona datos que son interpretados en los equipos de cómputo.

### 3.1 Calibración del sensor de desplazamiento

Para el uso del sensor de desplazamiento ferromagnético es necesario realizar una calibración apropiada para el tipo de material que se utiliza, en este caso el aluminio ya que estos sensores tienen una calibración estándar de fábrica para el tipo de material típico de los rotores y ejes rotativos.

El procedimiento consta de colocar el sensor una distancia cero del material a calibrar y se toma el valor del voltaje arrojado por el sensor como el punto de referencia, después, se va alejando el sensor con pequeños incrementos en este caso de 0.1 milímetros en un rango de 0 a 1.4 milímetros, en la figura 3.6 se muestra una tabla con los datos obtenidos

Tabla 3.1 Datos obtenidos para la calibración del aluminio.

Desplazamiento (mm)	Voltaje (V)
0	0.007
0.1	0.11685
0.2	0.255031
0.3	0.394061
0.4	0.534798
0.5	0.66274
0.6	0.788123
0.7	0.9118
0.8	1.02609
0.9	1.14124
1	1.2726
1.1	1.42272
1.2	1.58051
1.3	1.73404
1.4	1.87222



Con los datos obtenidos se prosiguió a elaborar una gráfica y trazar una línea de tendencia sobre la gráfica para obtener el valor de la sensibilidad para el aluminio. La línea de tendencia arroja una ecuación de la recta pendiente ordenada al origen en el cual en este caso la pendiente es el valor de la sensibilidad del sensor para el aluminio. En la figura 3.7 se muestra la gráfica obtenida con los datos y la línea de tendencia con la ecuación arrojada por esta.

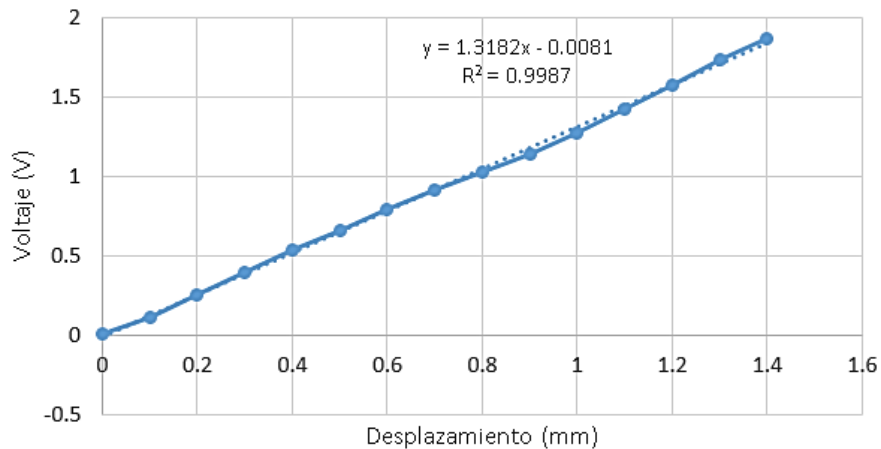


Figura 3.7 Grafica desplazamiento vs voltaje para la calibración del sensor ferromagnético

### 3.2 Análisis estático

Se comienza con el armado del prototipo para iniciar las pruebas estáticas (figura 3.8), después se colocó el sensor de desplazamiento a una distancia aproximada de 1.3 mm hacia la cuña (figura 3.9). Se procura que las probetas estén contacto al momento de aplicar la fuerza para no exista impacto entre estas.

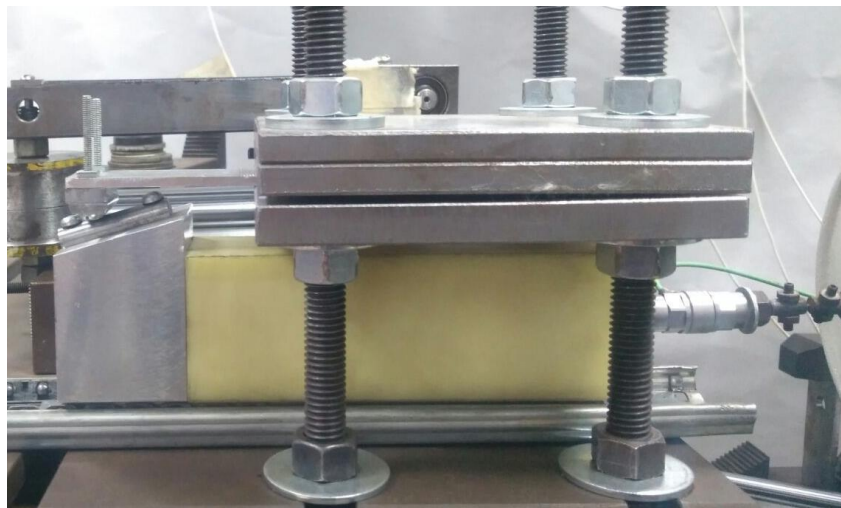


Figura 3.8 Prototipo armado.

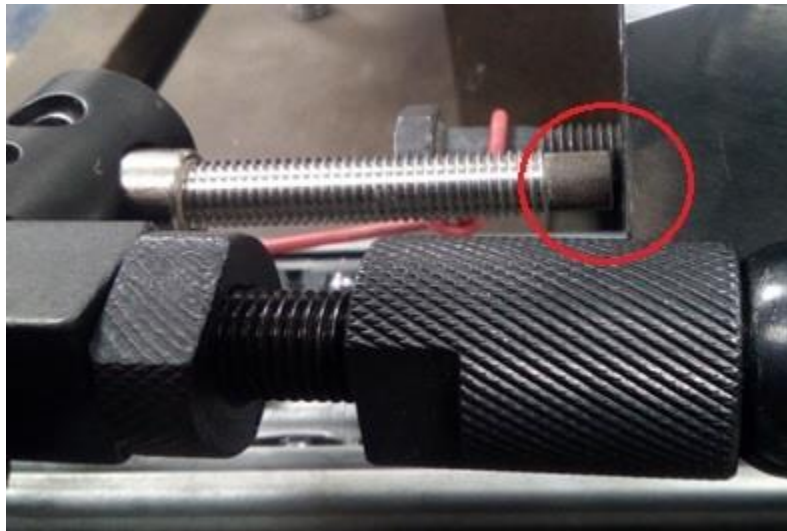


Figura 3.9 Posición inicial del sensor sobre la cuña.

Se prosigue las pruebas aplicando las cargas de 200, 300, 400 y 500 y 1000 gramos y se miden los desplazamientos con el sensor de desplazamiento y se visualizan con el analizador de señales. En la tabla 3.2 se muestran los datos obtenidos en las pruebas. Los desplazamientos obtenidos se usaron posteriormente para el cálculo de la rigidez tangencial del sistema.

Tabla 3.2 Datos obtenidos de las pruebas estáticas, están dados en milímetros.

300 gr	400 gr	500 gr	700 gr	1 kg
0.22793	0.340913	0.378195		0.75336
0.21161	0.31469	0.34711	0.56049	0.7535
0.18548	0.349406	0.334384	0.579	0.827
0.1913	0.32394	0.362471	0.5578	0.712
0.1985	0.308912	0.337656	0.56428	0.826
0.19527	0.32982	0.338954	0.57134	0.74612
0.21291	0.36443	0.372265	0.56056	0.826
0.20703	0.28053	0.353474	0.57	0.747
0.25732	0.303037	0.349406	0.558793	0.728201
0.22336	0.301078	0.3342		0.738003
0.23446	0.300426	0.3298		0.776531
0.22597	0.287366	0.3803		
	0.304995	0.3854		
	0.291287	0.38134		
		0.36737		
		0.35312		

En la figura 3.11 se aprecia uno de los datos obtenidos para la prueba de 300 gr en el analizador. La figura muestra una respuesta en función de tiempo en el cual la parte media de la señal arroja la medición más exacta, se muestra primero la posición inicial y la posición después de aplicada la carga. El desplazamiento se da en la ordenada que se llama “Y” y se aprecia en la parte inferior de cada imagen. Se mide una distancia inicial hacia la cuña de 1.24219 mm (figura) y una distancia final después de aplicada la carga de 1.05671 mm (figura) con lo que se da un desplazamiento de 0.18548 mm con una carga de 300 gr.

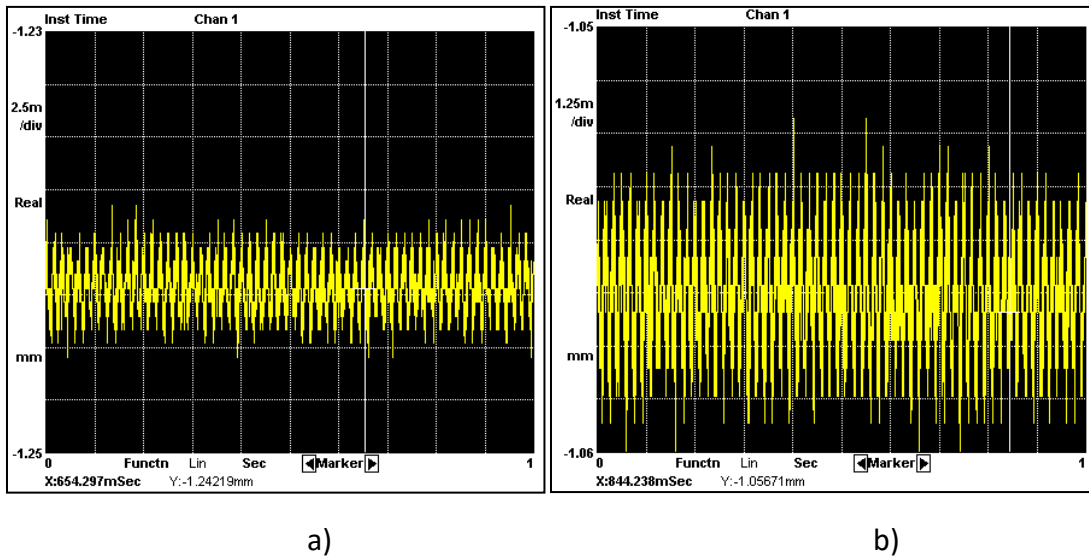


Figura 3.11 Señales arrojadas por el analizador donde: a) Medición de la distancia inicial, b) Medición de la distancia final después de la aplicación de la carga.

### 3.3 Resultados

Con los datos obtenidos se realizó un análisis estadístico para conocer el valor promedio, mediana y la desviación estándar de cada grupo de datos, en la tabla 3.3 se muestran los resultados obtenidos de este análisis.

Tabla 3.3 Análisis estadísticos de los datos obtenidos en las mediciones.

Masa (Kg)	Media (mm)	Mediana (mm)	Desviación estándar (mm)
300	0.214261667	0.21226	0.020658637
400	0.314345	0.3069535	0.024483673
500	0.35659031	0.353297	0.01899631
700	0.56528288	0.56242	0.00747849
1000	0.76670136	0.75336	0.04150581

Tomando en cuenta los datos estadísticos de la tabla 3.3 se lleva a cabo la graficación de la fuerza aplicada contra el desplazamiento obtenido lo que mostrará la linealidad de nuestro sistema y que tanto influye la fricción en este tipo de análisis. En la figura 3.14 se muestra la gráfica de fuerza contra desplazamiento marcando una tendencia lineal.

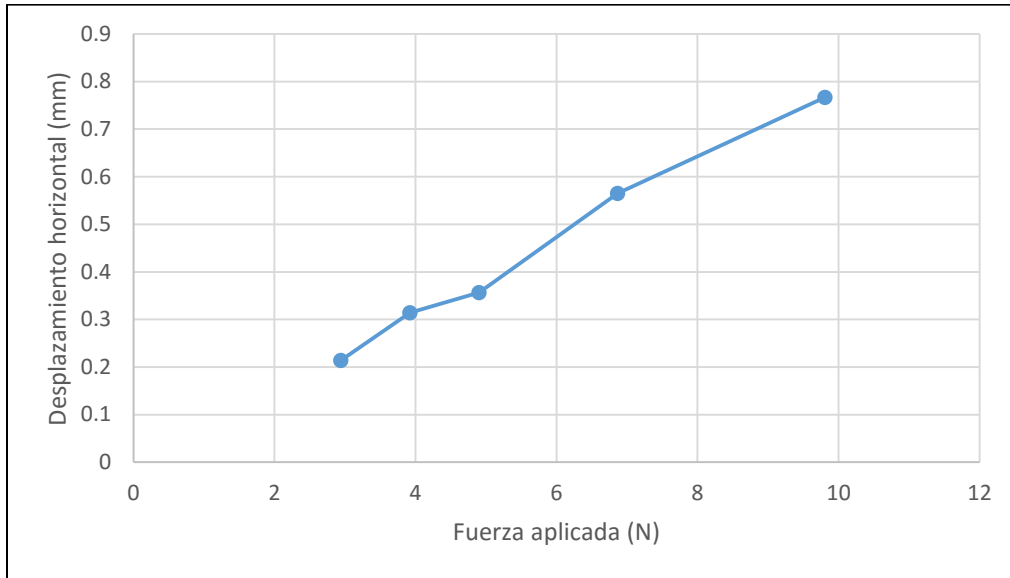


Figura 3.14 Grafica fuerza contra desplazamiento del prototipo analizado.

Para el cálculo de la rigidez tangencial entre las probetas en contacto que es una relación entre la fuerza aplicada y el desplazamiento horizontal se utilizaron las mismas pruebas teniendo como resultados los desplazamientos que se muestran en la figura 3.10 y 3.12. En la figura 3.15 se muestra una tabla con el cálculo de las rigideces tangenciales para cada carga aplicada.

Tabla 3.4 Calculo de las rigideces tangenciales para cada prueba.

Masa (Kg)	Desplazamiento horizontal (mm)	Rigidez tangencial (KN/m)
0.3	0.214261667	13.73554
0.4	0.314345	12.48309
0.5	0.35659031	13.75528
0.7	0.56528288	12.14790
1	0.76670136	12.79507

Se encontró que la rigidez tangencial para cada una de las pruebas realizadas para las diferentes masas tuvo una variación pequeña por lo que se puede establecer que la rigidez tangencial promedio del sistema es de **12.983376 KN/m**.

## **4. Análisis dinámico al prototipo de amortiguador por fricción y rigidez variable**

En esta sección se explican las pruebas dinámicas hechas al prototipo de amortiguador. El prototipo se analizó bajo diferentes condiciones de precarga y frecuencias para comparar el comportamiento mediante la medición de la fuerza de excitación y desplazamiento producido y la creación de ciclos de histéresis a partir de una excitación dinámica

### **4.1 Metodología para la elaboración de las pruebas**

En este análisis se sometió el prototipo de amortiguador a cargas dinámicas por medio de un excitador electromagnético con frecuencias de 5 y 10 Hz. Se empezara a aplicar la carga dinámica a partir de una precarga determinada. La precarga se proporciona como un desplazamiento en el vástago lo cual provoca que se genere una carga normal en la zona de contacto de las probetas del dispositivo. La metodología para realizar las pruebas dinámicas en el prototipo de amortiguador se compone de los siguientes puntos:

- Asignar el punto de contacto entre las probetas para evitar algún tipo de precarga mediante las mediciones de desplazamiento vertical de la viga en la cual se encuentra una de las probetas acopladas usando un sensor de desplazamiento ferromagnético. Para controlar el desplazamiento de la carga se utiliza una mesa graduada en milímetros la cual permite desplazamientos muy pequeños.
- Medición del ángulo de inclinación real de la cuña mediante el uso del vernier digital lo cual permitirá construir un modelo numérico para aproximar los datos experimentales.
- En todas las pruebas se controló el desplazamiento pico a pico el cual fue de aproximadamente 1 mm con una frecuencia de 5 y 10 Hz. Los cambios en las frecuencias de excitación se realizaron con la finalidad de ver el efecto que provoca la velocidad de deslizamiento.
- Aplicación y medición de la carga dinámica mediante un excitador electromagnético. Registro de la fuerza de excitación y el desplazamiento producido mediante un sensor de fuerza y un sensor de desplazamiento ferromagnético comenzado a partir de una precarga medida desde el punto de referencia del contacto anteriormente asignado. La precarga se asigna como un desplazamiento controlado usando una mesa graduada.

Las precargas aplicadas fueron de 1, 2 y 3 milímetros. Para cada prueba se trabajó con frecuencias de 5 y 10Hz. Mediante el analizador de señales se obtuvieron las distintas gráficas y datos y se procesaron dando como resultado los ciclos de histéresis.

- Para cada una de las pruebas se controló el desplazamiento pico a pico, el cual fue de  $1 \text{ mm} \pm 0.1 \text{ mm}$ . Se guardaron los datos después de dos minutos de prueba permitiendo la estabilización del sistema ante los efectos del desgaste. Se limpió con alcohol isopropílico la zona de contacto entre pruebas con la finalidad de eliminar residuos de desgaste y su influencia en las pruebas.
- Se analizaron los ciclos de histéresis obtenidos con la finalidad de estudiar el comportamiento del sistema para cada uno de los casos manejados.

En la tabla 4.1 se enumeran las pruebas dinámicas que se realizaron al prototipo indicando la frecuencia de trabajo, precarga aplicada y el desplazamiento pico a pico para cada prueba.

Tabla 4.1 Pruebas dinámicas realizadas al prototipo de amortiguador.

No. Prueba	Precarga	Frecuencia	Desplazamiento pico a pico
1	3 mm	5 Hz	1 mm
2	2 mm	5 Hz	1 mm
3	1 mm	5 Hz	1 mm
4	3 mm	10 Hz	1 mm
5	2 mm	10 Hz	1 mm
6	1 mm	10 Hz	1 mm

## 4. 2 Análisis dinámico

### ➤ *Análisis del prototipo con una frecuencia de 5 Hz*

Para todas las pruebas realizadas se utilizaron las mismas probetas anteriormente mencionadas. Para fines de repetitividad y estabilidad en el sistema se optó por trabajar con tres distintas precargas para una frecuencia de 5 Hz y una amplitud pico a pico de 1 milímetro. Posterior a cada prueba se limpió la zona de contacto con alcohol isopropílico para quitar los restos de material que pudieran afectar a las pruebas. Como se mencionó anteriormente, para cada prueba se asignó el punto de contacto y a partir de ahí se aplicó la precarga deseada tomando como punto de partida la medida tomada por la mesa móvil. Una vez obtenido el punto de contacto entre las probetas mediante la medición del desplazamiento vertical de la viga por medio del sensor ferromagnético (ver figura 4.1) se

aplicó la precarga mediante la mesa móvil (ver figura 4.2) y la aplicación de la carga dinámica mediante el excitador electromagnético. Los datos respectivos de fuerza de excitación y desplazamiento del vástago fueron registrados en el analizador de señales.



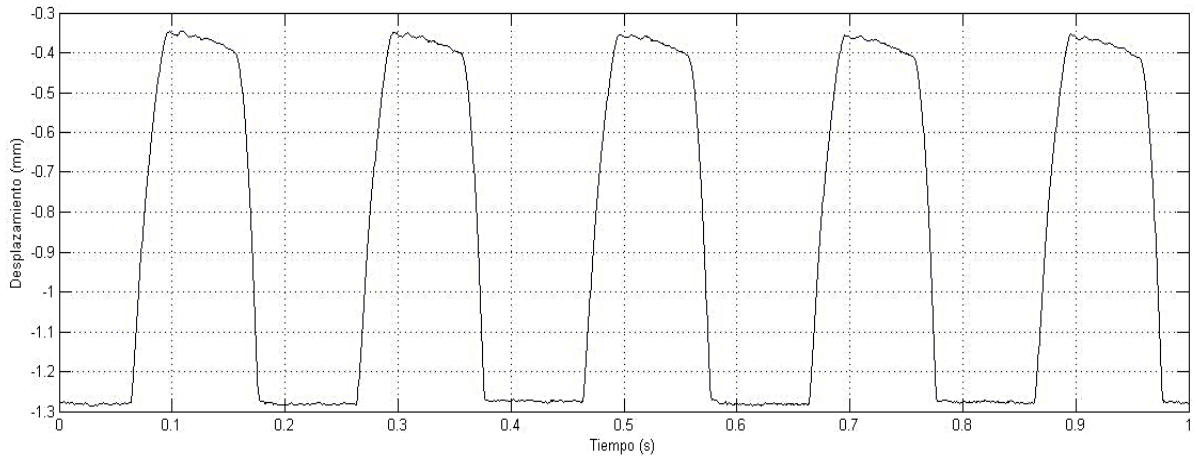
Figura 4.1 Posición del sensor ferromagnético para para indicar el contacto.



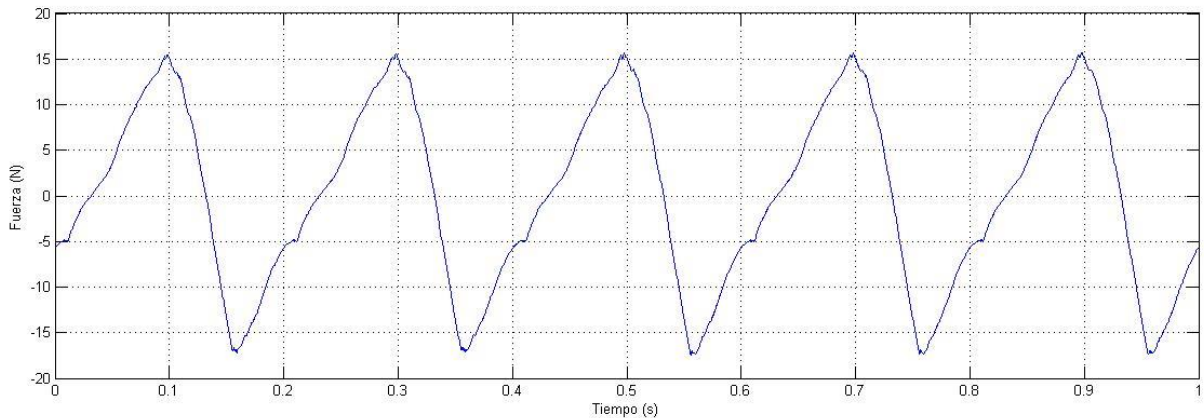
Figura 4.2 Perilla de la mesa móvil para la aplicación de la precarga.

Una vez terminada cada prueba se almacenaron los datos obtenidos tanto de fuerza como desplazamiento. En la figura 4.3 se muestran estas graficas obtenidas mediante los datos de la prueba para una precarga de tres milímetros a 5 Hz con un desplazamiento pico a pico

de un milímetro, esto para posteriormente crear los ciclos histéresis y hacer un análisis del comportamiento, la rigidez del sistema y la energía disipada por ciclo que se obtiene con los parámetros inicialmente dados.



a)

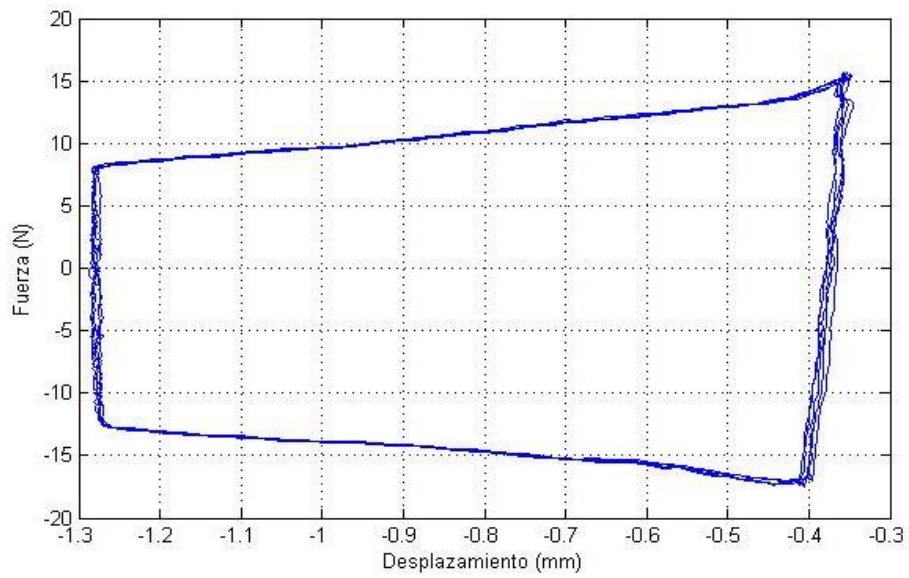


b)

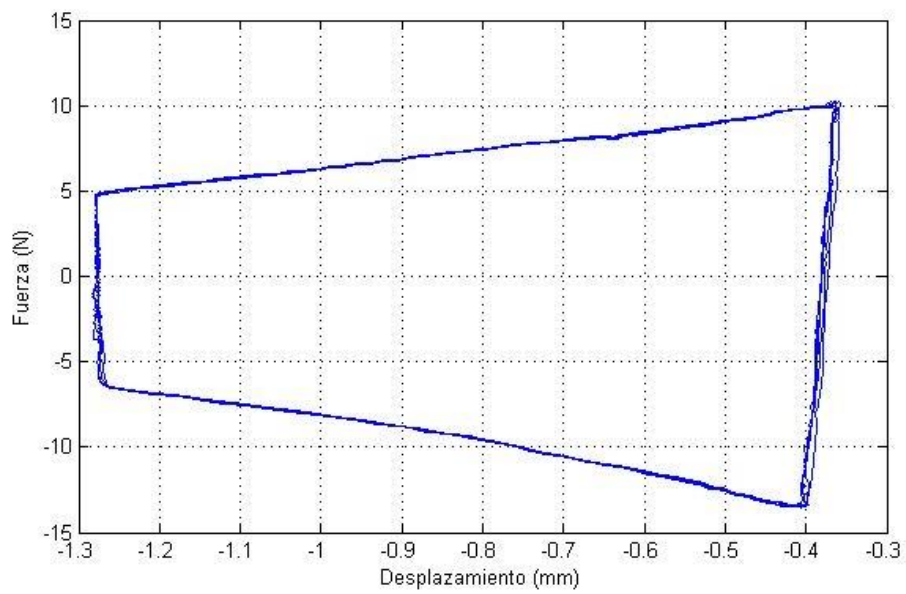
Figura 4.3 Graficas de los datos obtenidos por el analizador donde: a) Grafica de desplazamiento, b) Grafica de fuerza.

A partir de los datos de fuerza y desplazamiento obtenidos por el analizador de señales, se crearon los ciclos de histéresis para cada prueba como se muestra en la figura 4.4 los cuales indican mediante las pendientes creadas en cada ciclo las rigideces tangenciales del sistema. Por otra parte el área formada en cada ciclo proporciona la energía disipada por fricción en cada ciclo de funcionamiento del dispositivo.

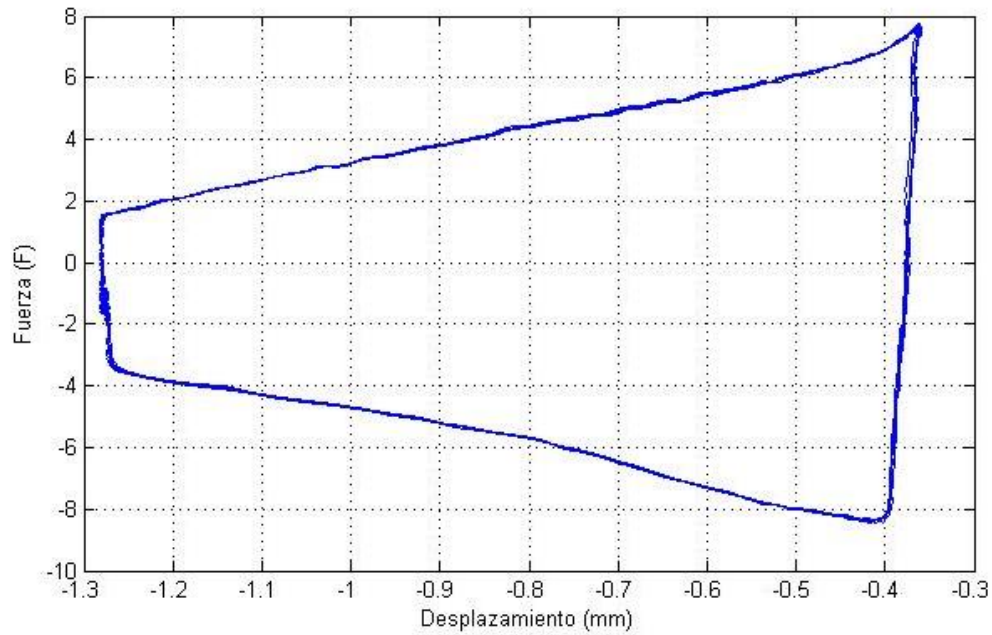




a)



b)



c)

Figura 4.4 Ciclos de histéresis para las pruebas realizadas a 5 Hz donde: a) Precarga de 3 mm, b) Precarga de 2 mm, c) Precarga de 1 mm.

Posterior a las pruebas se hace una comparación entre los ciclos de histéresis obtenidos como se muestra en la figura 4.5 en el cual se puede observar una disipación de energía mayor al aumentar la precarga.

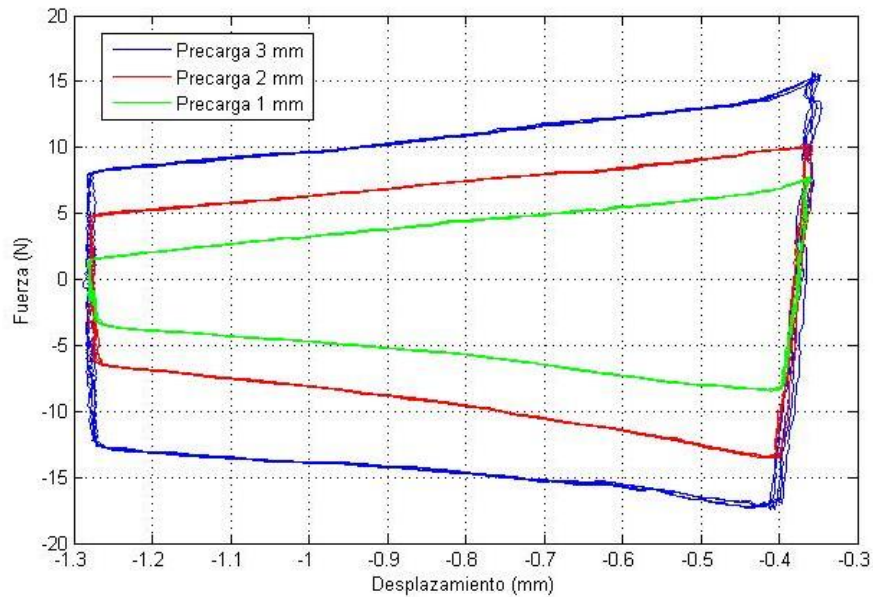
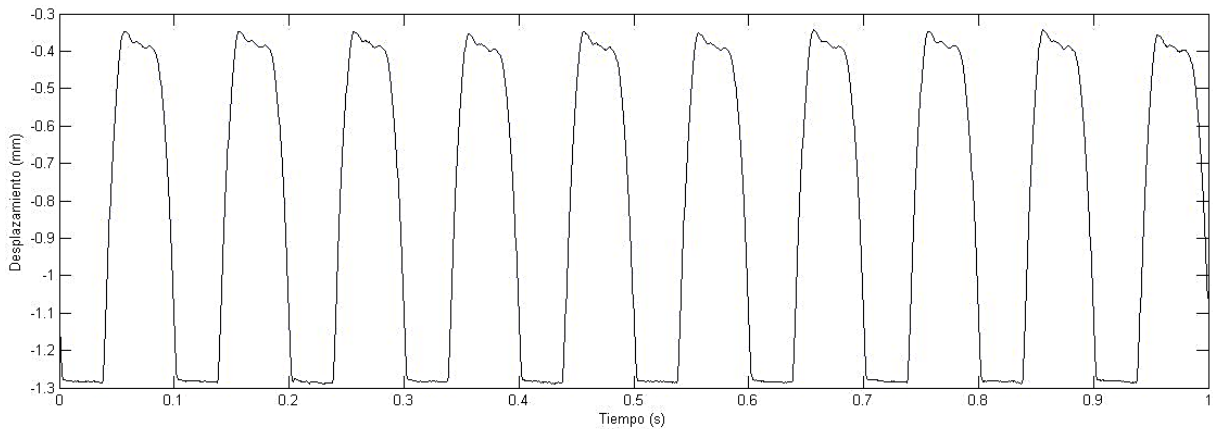
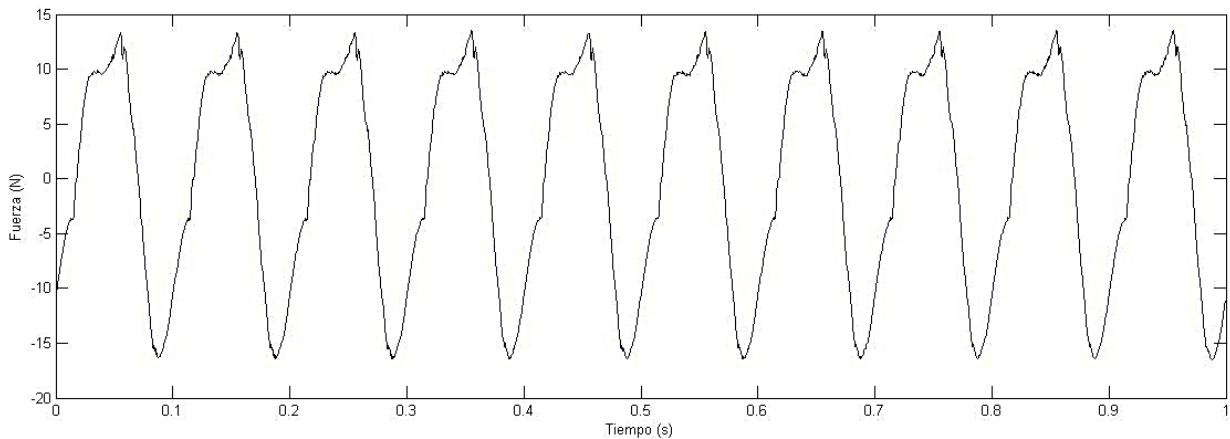


Figura 4.5 Comparación de los ciclos de histéresis para una frecuencia de 5 Hz.

Para el análisis con una frecuencia mayor, se buscó ver el efecto de la velocidad de deslizamiento entre las probetas. En este análisis se utilizó la misma metodología que la usada para una frecuencia de 5 Hz e igualmente se obtuvieron las gráficas de fuerza y desplazamiento para las diferentes precargas aplicadas. En la figura 4.6 se muestran las gráficas de desplazamiento y de fuerza en el dominio del tiempo para una frecuencia de 10 Hz con una precarga de 3 milímetros y un desplazamiento pico a pico de 1 mm.



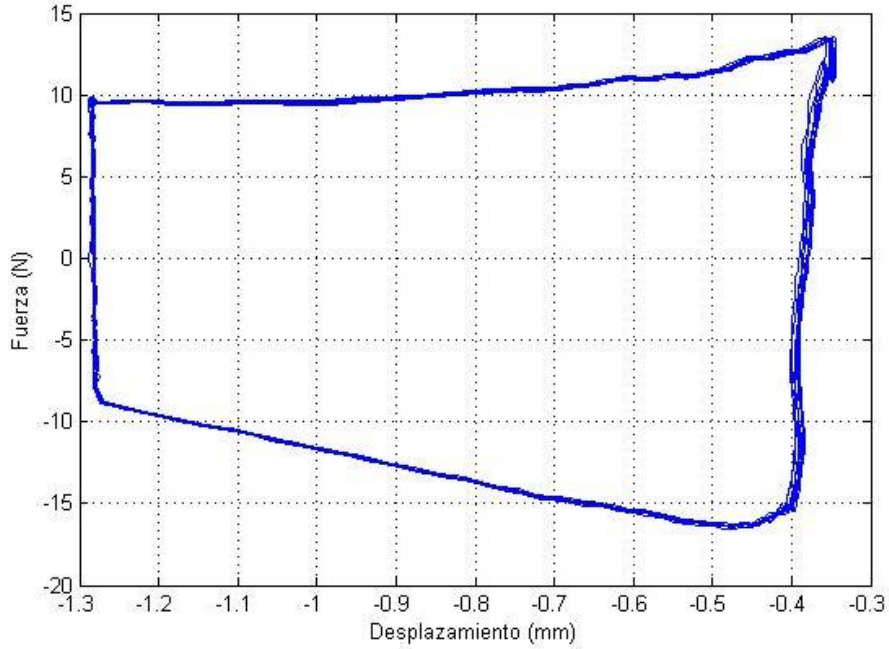
a)



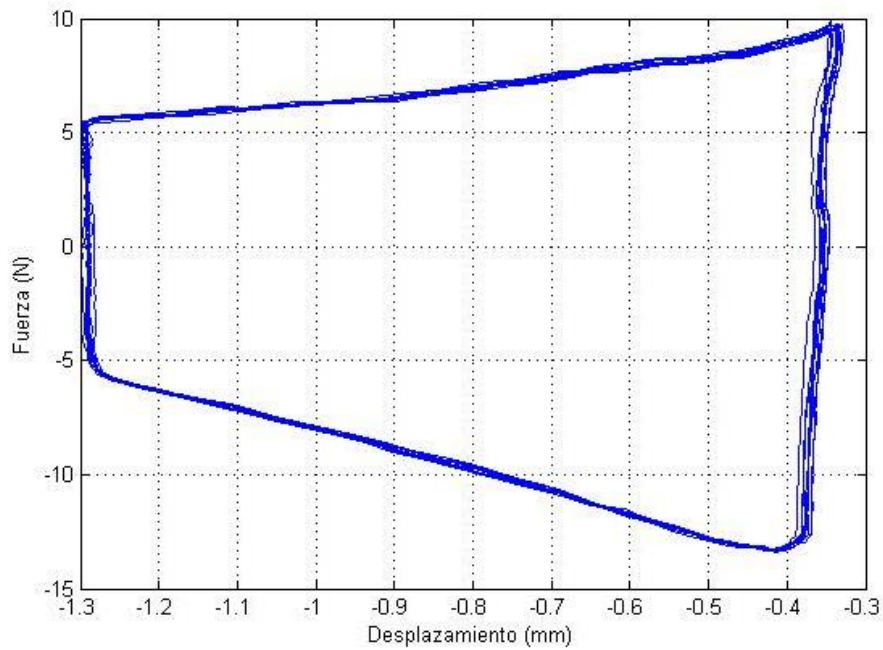
b)

Figura 4.6 Gráficas para el análisis con 10 Hz y 3 milímetros de precarga donde: a) Grafica de desplazamiento, b) Grafica de fuerza

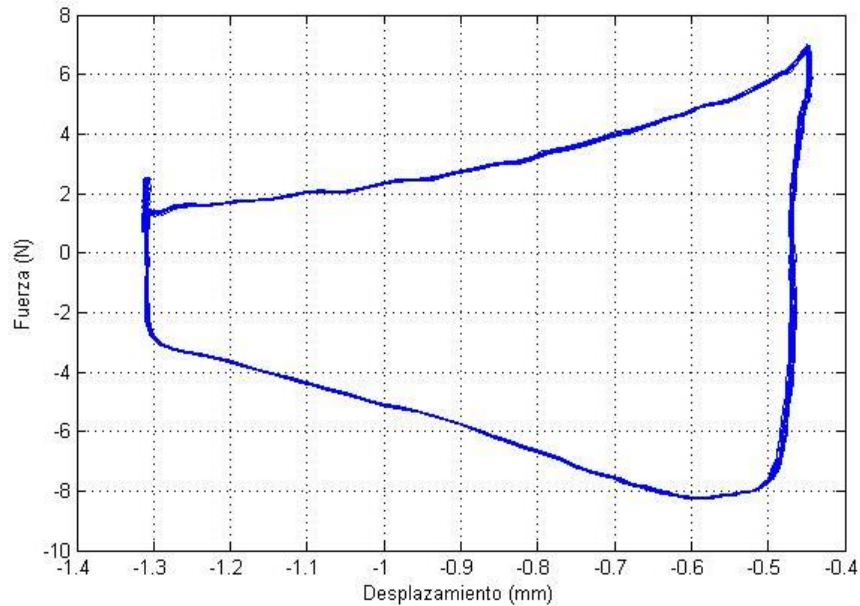
Una vez generados los datos de desplazamiento y fuerza se tienen los ciclos de histéresis mostrados en la figura 4.7 para cada precarga con una frecuencia de 10 Hz.



a)



b)



c)

Figura 4.7 Ciclos de histéresis para una frecuencia de 10 Hz donde: a) 3 mm de precarga, b) 2 mm de precarga, c) 1 mm de precarga.

Después de las pruebas con la frecuencia de 10 Hz se observó en las gráficas de los ciclos de histéresis que las rigideces tanto estáticas como dinámicas tomaron un comportamiento no lineal que pudo ser provocado por la velocidad de deslizamiento entre las superficies y una disminución del coeficiente de fricción debido al desgaste en la zona de contacto y partículas de material desgastado.

De manera similar se hace una comparación entre los tres ciclos de histéresis obtenidos en estas pruebas (ver figura 4.8) en donde sucede un fenómeno similar al anterior caso en donde la energía disipada es directamente proporcional a la precarga aplicada. En este caso se pudo observar que la velocidad de deslizamiento provocó una menor disipación de energía y una rigidez tangencial no lineal.

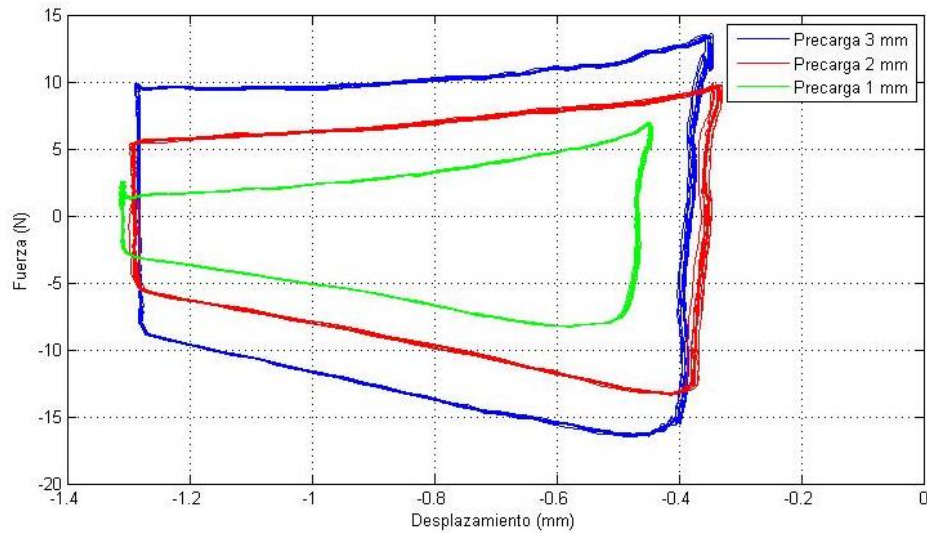


Figura 4.8 Comparación entre los ciclos de histéresis para una frecuencia de 10 Hz.

Se observó que después de cada una de las pruebas hechas se creaban en la zona de contacto entre las probetas marcas de desgaste y el material de desgaste en forma de polvillo era visible, esto es provocado por el movimiento armónico entre las superficies y la fricción, en la figura 4.9 se puede apreciar dicha marca.



Figura 4.9 Marcas de desgaste en la zona de contacto.

➤ **Análisis de las gráficas de fuerza y desplazamiento**

Mediante las gráficas de fuerza y desplazamiento arrojadas por el analizador de señales (ver figura 4.10) es posible analizar lo que sucede en la zona de contacto. Para este análisis se toma en cuenta la prueba a una frecuencia a 5 Hz con una precarga de 3 mm y un desplazamiento pico a pico de 1 mm. En la parte superior de la imagen aparece la gráfica de fuerza mientras que la parte inferior aparece la gráfica de desplazamiento. Se observa en el segmento 1-2 en la gráfica de fuerza que la fuerza pasa de su valor máximo negativo



a su valor máximo positivo lo que representa el regreso del vástago, en ese mismo segmento pero en la gráfica de desplazamiento se aprecia una pendiente en aumento lo que significa un pequeño aumento de desplazamiento y representa en gran parte a la rigidez tangencial del sistema. En el segmento 2-3 es la parte de ida del vástago en la parte del desplazamiento lo que significa que va desde la posición inicial a la posición final, y en la parte de la fuerza va desde su valor máximo positivo al valor máximo negativo.

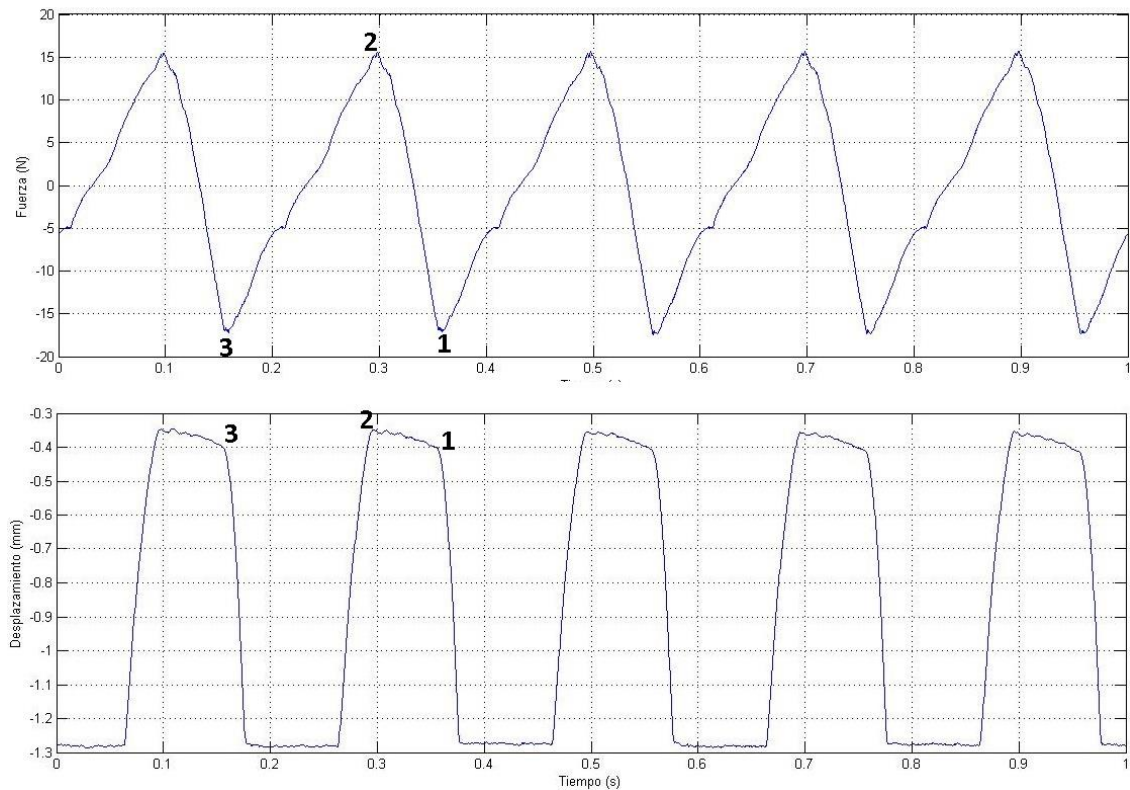


Figura 4.10 Graficas de fuerza y desplazamiento

### 4. 3 Resultados

#### ➤ *Cálculo de la rigidez tangencial*

Los ciclos de histéresis proporcionan un parámetro importante a tomar en cuenta en el análisis de cuerpos en contacto, este parámetro es la rigidez tangencial que depende de la fricción, propiedades estructurales y condiciones de carga. La rigidez tangencial puede ser encontrada mediante el cálculo de las pendientes en un ciclo de histéresis. En la figura 4.11 se muestra las rigideces obtenidas en el ciclo de histeresis en donde K1 y K3 son rigideces estaticas de ida y regreso; K2 y K4 son rigideces dinamicas de ida y regreso. Se calculó las rigideces dinamicas de ida K2 ya que se considera como la rigidez principal del sistema. El cálculo se llevó a cabo mediante una herramienta de Excel que permite crear una línea de tendencia y la cual nos arroja una ecuación pendiente ordenada al origen en la cual la

información dada por la pendiente será la rigidez tangencial buscada. En la figura 4.12 se muestran las gráficas obtenidas para las pruebas a 5 Hz con 3, 2 y 1 milímetros de precarga respectivamente.

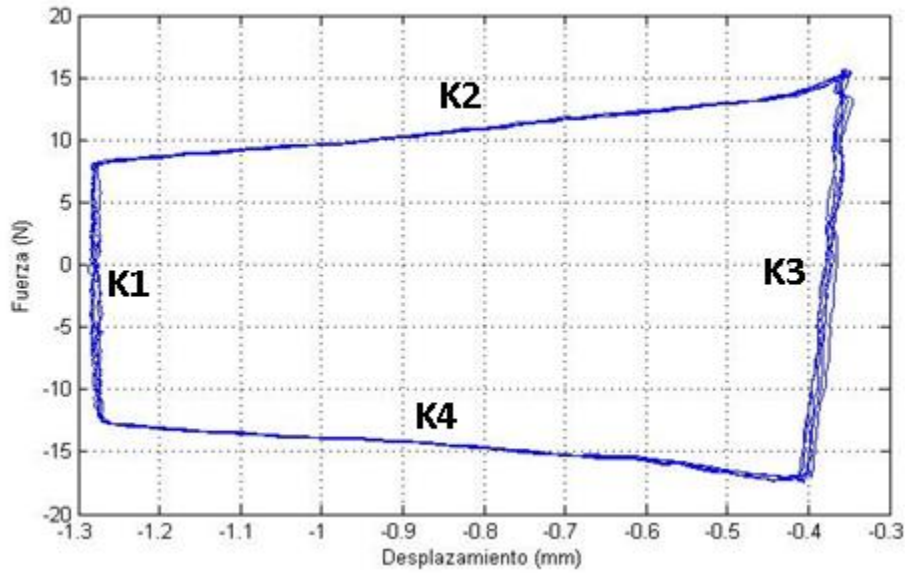
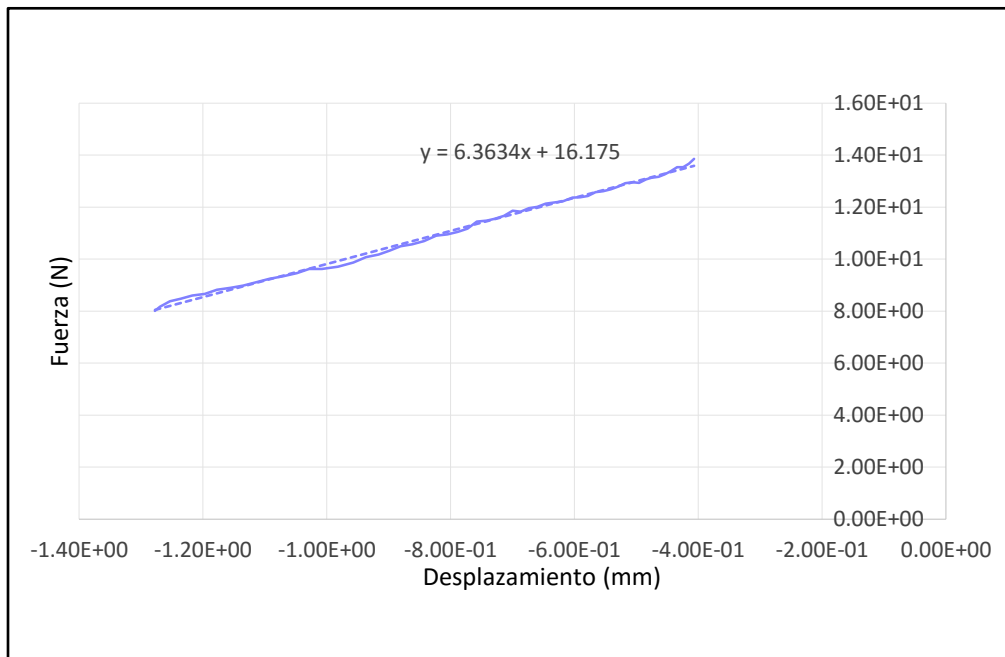
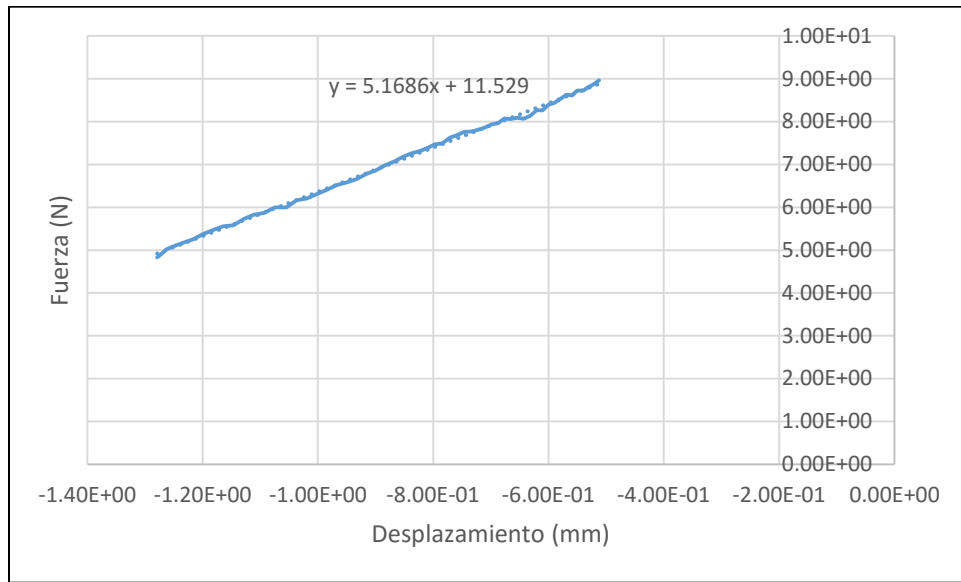


Figura 4.11 Rigideces estáticas y dinámicas del sistema.

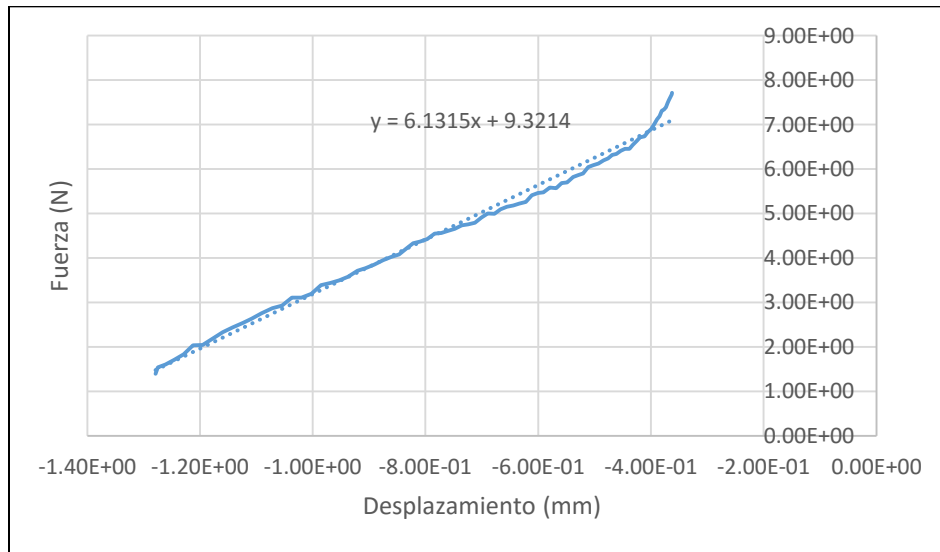


a)





b)



c)

Figura 4.12 Gráficas de las rigideces dinámicas  $K_2$  en cada ciclo donde: a) Pendiente para 3 mm de precarga, b) Pendiente para 2 mm de precarga, c) Pendiente para 1 mm de precarga.

En la tabla 4.2 se muestran los resultados para los cálculos de las rigideces para cada prueba.

Tabla 4.2 Rigideces tangenciales obtenidas para las pruebas con 5 Hz.

N° de prueba	Frecuencia	Precarga	Desplazamiento pico a pico	Rigidez tangencial
1	5 Hz	3 mm	1 mm	6.3634 KN/m
2	5 Hz	2 mm	1 mm	5.1686 KN/m
3	5 Hz	1 mm	1 mm	6.1315 KN/m

➤ **Energía disipada**

Uno de los datos importantes que se obtienen a partir de un ciclo de histéresis de fricción es la energía disipada por ciclo lo cual puede ser aproximada mediante el cálculo del área encerrada por el ciclo. Se realizó el cálculo de la energía disipada por ciclo en las pruebas realizadas para ambas frecuencias para realizar una comparación.

Para el cálculo de la energía disipada se utilizó el software CAD Solidworks, en el cual se dibujaron puntos con las coordenadas obtenidas mediante el analizador de señales. Se utilizó como coordenadas “y” los valores de fuerza y como coordenadas “x” los valores de desplazamiento. En la figura 4.13a se muestra los puntos con sus respectivas coordenadas ya dibujados en el software. Mediante la herramienta “spline” proporcionada por el software se unieron todos los puntos logrando un área encerrada (ver figura 4.13b) y la cual puede ser calculada.



Figura 4.13 Dibujo del área del ciclo histéresis donde: a) Puntos dibujados, b) Área dibujada.

En la tabla 4.3 se muestra en resultado del cálculo de cada área con respecto a las realizadas en la experimentación.

Tabla 4.3 Resultados obtenidos del cálculo de energía disipada.

N° de prueba	Frecuencia	Precarga	Desplazamiento pico a pico	Energía disipada
1	5 Hz	3 mm	1 mm	<b>0.02342 J</b>
2	5 Hz	2 mm	1 mm	<b>0.01764 J</b>
3	5 Hz	1 mm	1 mm	<b>0.01061 J</b>
4	10 Hz	3 mm	1 mm	<b>0.01722 J</b>
5	10 Hz	2 mm	1 mm	<b>0.01572 J</b>
6	10 Hz	1 mm	1 mm	<b>0.00769 J</b>

#### 4.4 Conclusiones

Se construyó e instrumentó un prototipo de amortiguador por fricción y rigidez variable para realizar un estudio experimental sobre la disipación de energía mediante fricción y un contacto puntual entre acero-acero. Los elementos utilizados para la construcción del prototipo son de fácil diseño y maquinado lo que permite un análisis más sencillo con las características necesarias para obtener resultados correctos.

En el análisis de contacto entre las probetas en la primera parte se realizó un estudio experimental estático. En esta parte se tiene en cuenta una precarga que se toma como un desplazamiento horizontal del vástago dado por un peso muerto conocido, donde, a partir de un desplazómetro se midieron los desplazamientos y se pudo calcular la rigidez tangencial de manera sencilla.

Se realizó el estudio dinámico del prototipo mediante una excitación armónica a diferentes frecuencias y precargas con un desplazamiento pico a pico de 1 mm y se verificó que se genera una mayor disipación de energía a una mayor precarga y una menor frecuencia.

La rigidez tangencial en el sistema con una frecuencia de 5 Hz marco una tendencia lineal con las tres diferentes precargas aplicadas mientras que con frecuencia de excitación de 10 Hz se apreció una rigidez no lineal, esto debido a una mayor velocidad de deslizamiento entre las probetas y un mayor desgaste presentado en la zona de contacto ya que se generan 10 ciclos por segundo.

Se demostró que entre mayor sea la velocidad de deslizamiento entre las probetas y el desgaste en la zona de contacto provocan una disminución de energía disipada por ciclo y una rigidez tangencial dinámica no lineal lo que nos indica que el coeficiente de fricción cambia constantemente respecto al tiempo.

Se logró una disipación máxima de energía de 23.42 N.mm con una precarga de 3 milímetros a una frecuencia de 5 Hz con un desplazamiento pico a pico de 1 milímetro.

Después de la comparación entre los ciclos de histéresis para 5 y 10 Hz para las tres precargas dadas, se observó una tendencia de disminución significativa del área encerrada por el ciclo conforme la precarga inicial se disminuía, por lo tanto se concluye que para este sistema la precarga es directamente proporcional a la energía disipada.

En las gráficas de los ciclos de histéresis para una frecuencia de 10 Hz y un desplazamiento pico a pico de 1 milímetro para las tres diferentes precargas aplicadas se observa el efecto del deslizamiento en las rigideces dinámicas lo cual afecta a la disipación de energía ya que provoca una disminución de área dentro del ciclo.

#### **4.5 Recomendaciones**

Realizar las mismas pruebas con probetas de materiales como cobre, bronce y aluminio y una combinación de estos para poder variar el coeficiente de fricción y ver el efecto que esto provoca en los resultados.

Realizar las pruebas mediante un contacto superficial para las mismas frecuencias y precargas utilizadas en este trabajo y comprar los resultados.

Realizar pruebas al prototipo sin ninguna precarga de por medio utilizando las mismas frecuencias de 5 y 10 Hz y el mismo desplazamiento pico a pico de 1 milímetro y comparar los resultados con los obtenidos en las pruebas de este trabajo.

Realizar pruebas para las mismas precargas de 1, 2 y 3 milímetros a una frecuencia de 15 Hz o mayor para comprobar el efecto de la velocidad de deslizamiento.

Realizar una experimentación del prototipo con el péndulo de Charpy para comprobar su eficiencia con pruebas de impacto.

## 4.6 Referencias

- Akira Nishitani, Y. N. (2000). *Semiactive Variable-Friction Damper Control with Simple Algorithm*.
- Beer, J. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estatica*. Mc Graw Hill.
- Calderón, E. C. (2009). *Análisis Experimental de la Fricción Seca en una Viga en Cantiliver*. Cuernavaca: Enrique Contreras Calderón .
- Castro, F. (2017). *Análisis numérico y paramétrico del problema de contacto en uniones mecánicas*. Cuernavaca.
- Chou, D. (2004). *Dahl Friction Modeling*. Massachusetts: Danielle Chou.
- Claudiu Iurian, F. I. (2005). *Identification of a system with dry friction*. Catalunya: Claudiu Iurian, Fayçal Ikhoulane, José Rodellar, Robert Griñó .
- Contreras, E. (2009). *Análisis Experimental de la Fricción Seca en una Viga en Cantiliver*. Cuernavaca: Enrique Contreras Calderón .
- Drincic, B. (2012). *Mechanical Models of Friction That Exhibit Hysteresis, Stick-Slip, and the Stribeck Effect*. Michigan: Bojana Drincic.
- F. Castro, Y. H. (2015). *Diseño, construcción y experimentación de un prototipo de amortiguador gradual de vibraciones por fricción*. Cuernavaca.
- Geffen, V. V. (2009). *A study of friction models and friction compensation*. Eindhoven.
- Ian D. Aiken, D. K. (1993). *Testing of Passive Energy Dissipation Systems*. EARTHQUAKE SPECTRA.
- J. Hirai, M. N. (1996). *Structural Control with Variable Friction Damper for Seismic Response*.
- Jang Jeong-Hyun, H. J.-H.-H. (2012). *An Evaluation on Seismic Behavior of VRF Damper by Shaking Table Test*. 15 WCEE.
- Johnson, K. L. (1985). *Contact mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- K. Shirai, T. S. (2013). *Development of a passive variable friction damper with displacement - dependent damping force characteristics*.
- M. Jelali, B. H. (2010). *Detection and Diagnosis of Stiction in Control Loops*.
- Popov, V. L. (2010). *Contact Mechanics and Friction*. Berlin: Springer.

*Zhou Xiyuan, P. L. (2009). A new type of damper with friction-variable characteristics. Earthquake engineering and engineering vibration, 507-520.*