INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TUXTLA GUTIÉRREZ

RESIDENCIA PROFESIONAL

CÁLCULO DE LA PRIMERA VELOCIDAD CRÍTICA DE UN EJE ESCALONADO CON DOS APOYOS SIMPLES Y CÁLCULO DEL DIÁMETRO CONSTANTE DE UN EJE MEDIANTE MATLAB

INTEGRANTES:

MUÑOZ MANGAS JORGE LUIS

RAMÍREZ VÁZQUEZ ROGER´S ALEXANDER

INDICE

INTRODUCCION

La residencia profesional es una herramienta que permite consolidar la formación académica y profesional de un alumno, es también un factor estratégico en la tarea de impulsar el desarrollo, así como para mejorar los conocimientos que conducen a que los demás compañeros puedan reafirmar sus resultados en base a las investigaciones.

Todo esto contribuye en la formación integral del estudiante, el desarrollar valores favorecen la inserción al mercado de trabajo y la aplicación del conocimiento científico, humanístico y tecnológico al promover el acercamiento activo de la universidad con la sociedad; al mismo tiempo, coadyuva en la solución de los problemas actuales del desarrollo.

En la actualidad vivimos en un mundo en donde los avances científicos y tecnológicos requieren de innovación, rapidez y precisión, donde el tiempo es el principal reto a vencer.

El presente proyecto tiene la finalidad de aplicar los conocimientos adquiridos durante el periodo de la carrera de Ing. Mecánica para luego ponerlos en práctica y de esta manera poder realizar un software que calcule tanto la primera velocidad crítica de un eje con 3 masas distintas con diámetro escalonado como también el cálculo del diámetro constante del mismo eje.

Con este software se pretende facilitar los cálculos tanto de la primera velocidad crítica como el diámetro constante de un eje ya que dichos cálculos representan horas de trabajo lo cual puede llevar a tener errores de sustitución, con el uso del equipo de cómputo y del programador se puede reducir las horas de trabajo y el margen de error.

JUSTIFICACION

La vida cotidiana trae retos los cuales se deben afrontar y buscar día a día las posibles soluciones. El Ing. Mecánico en muchas ocasiones debe realizar cálculos matemáticos que resultan laboriosos y hasta complicados, por lo que se deben buscar opciones que faciliten los procedimientos, por lo que se consideran los siguientes puntos:

- Crear un software especializado que dé solución a este problema.
- Analizar los datos establecidos en el problema.
- Analizar el manejo del programa.
- Informar al usuario que manejará el software

OBJETIVOS

- Que los alumnos tengan un buen dominio del software.
- Desarrollar un programa que ayude a corroborar y a certificar los resultados del cálculo de la primera velocidad crítica de un eje, además de calcular el diámetro del mismo.
- Ayudar a que al usuario se le facilite el resultado de una forma más sencilla.
- Disminuir el margen de error en los resultados.
- Disminuir el tiempo de cálculo.

ALCANCES Y LIMITACIONES

Alcances

- El desarrollo de este software permite llevar a la práctica conocimientos adquiridos a través de las asignaturas del área de Ingeniería Mecánica.
- La utilización de este programa de software que se desarrolló en este proyecto permite un mínimo de variación en nuestros resultados de acuerdo a los cálculos tradicionales.
- Los resultados son obtenidos de forma más rápida.
- Facilita el proceso del cálculo del problema.
- La forma de insertar los datos es simple y sencilla.

Limitaciones

- El software solo calcula un eje con un máximo de tres masas.
- Para la obtención de la primera velocidad crítica el eje solo puede tener un máximo de tres diámetros diferentes.
- Solo calcula la primera velocidad crítica para ejes simplemente apoyados, donde los apoyos están al principio y al final del eje
- Solamente puede calcular el diámetro constante de un eje.

PROBLEMAS A RESOLVER

Como ya se ha mencionado este programa ayudará tanto a los estudiantes como a los ingenieros a hacer de manera más rápida y sencilla el cálculo de la primera velocidad crítica, ahorrando mucho tiempo ya que este cálculo es muy tardado y más cuando se trata de un eje escalonado, también este programa hará una pequeña gráfica de como se ve el eje de acuerdo con los datos proporcionados.

Por otra parte, el programa puede encontrar el diámetro de un eje, siempre y cuando éste eje sea de diámetro constante, también se ahorrara mucho tiempo y se podrá resolver de una manera muy sencilla y rápida con solo conocer la primera velocidad crítica y los datos que normalmente se proporcionan, además también dará una pequeña visualización de como se vería el eje con el diámetro encontrado.

FUNDAMENTO TEORICO

Un eje de transmisión es un elemento de sección circular cuya función es la de transmitir movimiento y potencia. La transmisión del movimiento se realiza a través de otros elementos tales como engranes, poleas, cadenas, etc.

Diseñar un eje consiste básicamente en la determinación del diámetro correcto del eje para asegurar una rigidez y una resistencia satisfactorias, cuando el eje transmite potencia bajo diferentes condiciones de carga.

Criterios de diseño de ejes

El diseño de un eje debe estudiarse a partir de los siguientes puntos de vista:

1. Análisis por resistencia.
    - Bajo cargas estáticas.
    - Bajo cargas dinámicas.
2. Análisis por rigidez.
    - Cálculo de deformaciones.
    - Velocidades críticas.

A nosotros lo que nos interesa es el análisis por rigidez.

Velocidad crítica de ejes

Todos los ejes, aún sin la presencia de cargas externas, se deforman durante la rotación. La magnitud de la deformación depende de:

- La rigidez del eje y de sus soportes.
- De la masa total del eje y de las partes que se adicionan.
- Del desequilibrio de la masa con respecto al eje de rotación.
- Del amortiguamiento presente en el sistema.

La deformación, considerada como una función de la velocidad, presenta sus valores máximos en las llamadas velocidades críticas, pero solo la más baja (primera) y ocasionalmente la segunda tiene importancia en el diseño. Las otras son generalmente tan altas que están muy alejadas de las velocidades de operación. Lo anterior se ilustra en la siguiente figura 1:

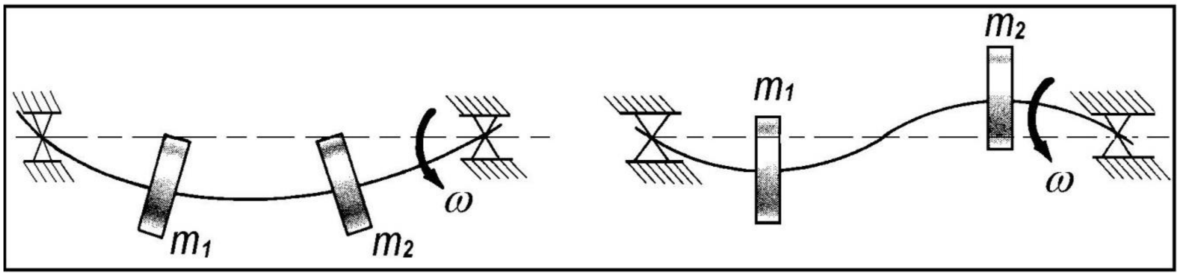


Figura 1. a).- Primera velocidad crítica. b).- Segunda velocidad crítica.

La frecuencia natural de un eje en flexión es prácticamente igual a la velocidad crítica. Existe una pequeña diferencia debida a la acción giroscópica de las masas.

Para un eje con una sola masa, en donde la masa del eje es pequeña en comparación a la masa que lleva unida, la primera velocidad crítica se puede calcular de manera aproximada por

$$\omega_C = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ rad/seg} \qquad \text{Ec. (1)}$$

En donde:

$k =$ constante de resorte del eje

$m =$ masa soportada por el eje

La primera velocidad crítica puede calcularse también por

$$\omega_C = \sqrt{\frac{g}{\delta}} \text{ rad/seg} \qquad \text{Ec. (2)}$$

En donde:

$g =$ aceleración de la gravedad

$\delta =$ deflexión del eje en el punto de ubicación de la masa

La figura 2 muestra un eje flexionado que gira a una velocidad ω.

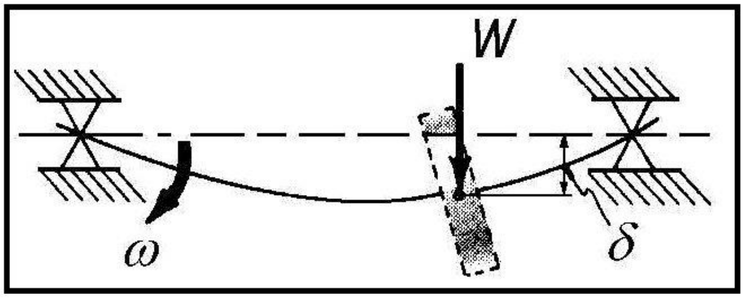


Figura 2. Deflexión en un eje de una sola masa con peso W.

Para un eje de masa despreciable con varias masas concentradas unidas a él, la primera velocidad crítica lo determinamos por:

a).- La ecuación de Rayleigh-Ritz.

Para el este caso se tiene lo siguiente:

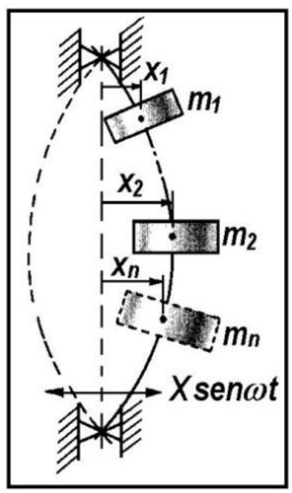


Figura 3. Eje con tres masas y apoyos simples

De acuerdo con la figura 3, la energía cinética máxima es:

$$EC_{máx} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{2}m_nv_n^2 \qquad \text{Ec. (a)}$$

Debido a que el movimiento de las masas es senoidal se tiene que

$$EC_{máx} = \frac{1}{2}m_1(\omega x_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\omega x_2)^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{2}m_n(\omega x_n)^2 \ \therefore$$

$$EC_{máx} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_n x_n^2 \qquad \text{Ec. (3)}$$

La energía potencial máxima es:

$$EP_{máx} = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{2}k_nx_n^2 = \frac{1}{2}\sum k_nx_n^2 \qquad \text{Ec. (4)}$$

De acuerdo con Rayleigh

$$EC_{máx} = EP_{máx} \therefore \frac{1}{2}\omega^2\sum m_nx_n^2 = \frac{1}{2}\sum k_nx_n^2 \qquad \text{Ec. (b)}$$

Si $x_n = \delta_n, m_n = \frac{W_n}{g}$ y $k_n = \frac{W_n}{\delta_n}$ entonces en (b) se obtiene lo siguiente:

$$\omega_C = \sqrt{\frac{g\sum_{k=1}^{n} W_k\delta_k}{\sum_{k=1}^{n} W_k\delta_k^2}} \qquad \text{Ec. (5) (Ecuación de Rayleigh − Ritz)}$$

En donde:

$\omega_k = \text{Peso de la masa k} - \text{ésima}$

$\delta_k = \text{Deformación estática de la masa k} - \text{ésima}$

$n = \text{número total de masas}$

Es importante tomar en cuenta que la ecuación de Rayleigh-Ritz son aproximaciones a la primera frecuencia natural de vibración o velocidad crítica de rotación, ya que sobrestima la frecuencia natural.

En un sistema de masas múltiples, para velocidades críticas más altas se requiere de cálculos más extensos para la determinación de estas velocidades; sin embargo, para un sistema con dos masas la primera y la segunda velocidad crítica se obtienen a partir de la figura 4:

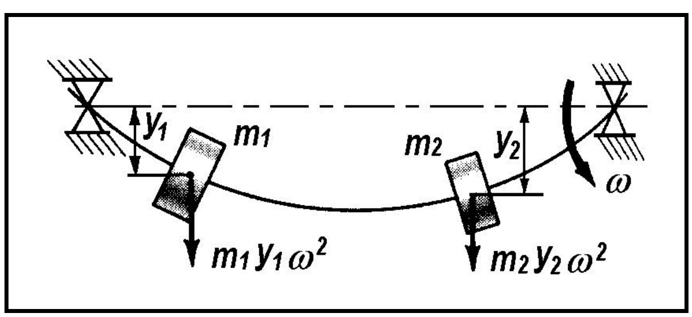


Figura 4. Eje con dos masas

En la figura 4 $F_C = m(y\omega^2)$ es la fuerza centrífuga.

Utilizando los coeficientes de influencia se determinan las deflexiones como sigue:

$$y_1 = a_{11}m_1y_1\omega^2 + a_{12}m_2y_2\omega^2 \therefore \frac{y_1}{y_2} = \left[a_{11}m_1\left(\frac{y_1}{y_2}\right) + a_{12}m_2\right]\omega^2 \qquad \text{Ec. (c)}$$

$$y_2 = a_{21}m_1y_1\omega^2 + a_{22}m_2y_2\omega^2 \therefore 1 = \left[a_{21}m_1\left(\frac{y_1}{y_2}\right) + a_{22}m_2\right]\omega^2 \qquad \text{Ec. (d)}$$

Despejando en cualquiera de las dos ecuaciones a $\left(\frac{y_1}{y_2}\right)$ y sustituyendo en la otra se obtiene la ecuación de frecuencias:

$$\frac{1}{\omega^4} - (a_{11}m_1 + a_{22}m_2)\frac{1}{\omega^2} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})m_1m_2 = 0 \qquad \text{Ec. (6)}$$

Con ésta ecuación obtenemos las raíces positivas $\frac{1}{\omega_1}$ y $\frac{1}{\omega_2}$, en donde ω_1 y ω_2 son la primera y segunda velocidad crítica (o frecuencias naturales de vibración). Las dos masas son m_1 y m_2.

Las constantes a se conocen como coeficientes de influencia, en donde:

a_{11}= deformación en el punto de localización de la masa m_1, producida por una carga unitaria localizada en el punto de la masa m_1.

a_{22}= deformación en el punto de localización de la masa m_2, producida por una carga unitaria localizada en el punto de la masa m_2.

a_{12}= deformación en el punto de localización de la masa m_2, producida por una carga unitaria localizada en el punto de la masa m_1.

a_{22}= deformación en el punto de localización de la masa m_1, producida por una carga unitaria localizada en el punto de la masa m_2.

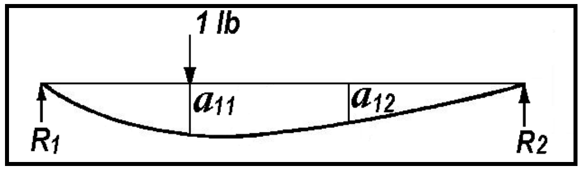
$a_{12} = a_{21}$

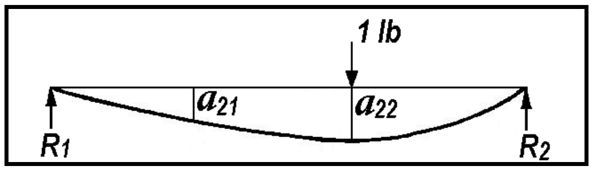
En la ecuación de Rayleigh-Ritz las deformaciones en las masas m_1 y m_2 se pueden determinar por

$$\left.\begin{aligned}\delta_1 &= W_1a_{11} + W_2a_{12}\\ \delta_2 &= W_2a_{21} + W_2a_{22}\end{aligned}\right\} \qquad \text{Ec. (7)}$$

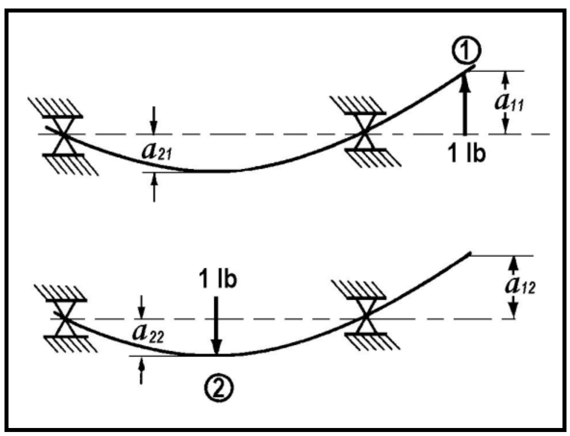
Los coeficientes de influencia se determinan como sigue:

a).- Eje simplemente apoyado en sus extremos con dos masas concentradas.





b).- Eje simplemente apoyado en un extremo y un voladizo.



En la figura anterior se puede observas que la carga unitaria (1) se aplica hacia arriba para que la curvatura coincida con la que se tiene al aplicar la carga (2).

Para un sistema de masas múltiples, la ecuación de frecuencias se obtiene resolviendo el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \left(a_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2}\right) & (a_{12}m_2) & \dots\dots\dots & (a_{1n}m_n) \\ (a_{21}m_1) & \left(a_{22}m_2 - \frac{1}{\omega^2}\right) & \dots\dots\dots & (a_{2n}m_n) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ (a_{n1}m_1) & a_{n2}m_2 & \dots\dots\dots & \left(a_{nn}m_n - \frac{1}{\omega^2}\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{Ec. (8)}$$

CÁCULO DE LA PRIMERA VELOCIDAD CRÍTICA DE UN EJE ESCALONADO CON DOS APOYOS SIMPLES

En este proyecto se analizará la velocidad crítica de un eje con tres diámetros diferentes y tres masas por medio de la ecuación Rayleigh-Ritz, donde las deflexiones ocasionadas por cada fuerza se calcularán mediante el Teorema de Castigliano. A continuación se presenta el eje a analizar:

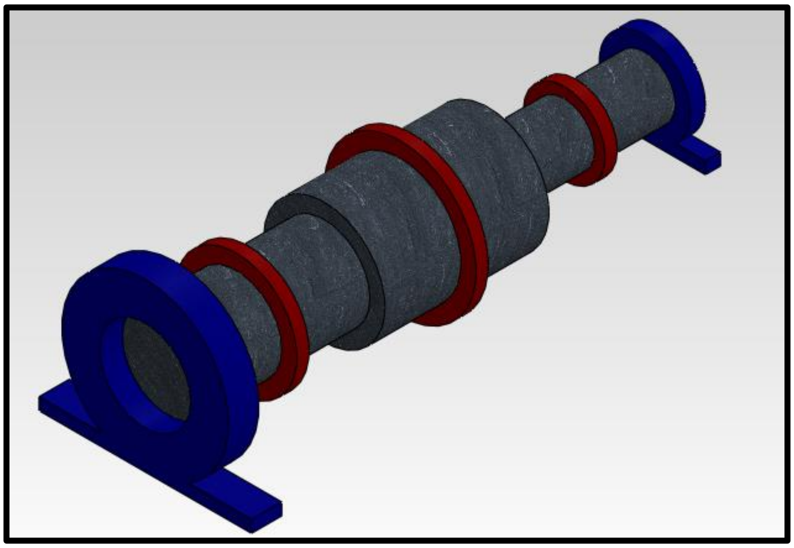


Figura 5. Eje escalonado con tres masas y apoyos siemples

En la siguiente figura se presenta el eje con los datos algebraicos:

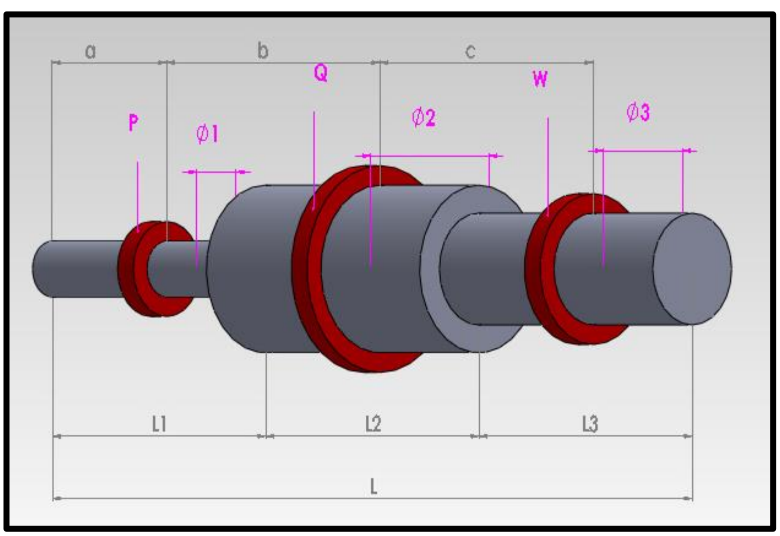


Figura 6. Eje con sus valores algebraicos.

Donde:

$P =$ Primera fuerza (N ó Lb)

$Q =$ Segunda fuerza (N ó Lb)

$W =$ Tercer fuerza (N ó Lb)

$L_1 =$ Longuitud del primer tramo (m ó in)

$L_2 =$ Longuitud del segundo tramo (m ó in)

$L_3 =$ Longuitud del tercer tramo (m ó in)

$L =$ Longuitud total del tramo (m ó in)

$\emptyset_1 =$ Diámetro del primer tramo (m ó in)

$\emptyset_2 =$ Diámetro del segundo tramo (m ó in)

$\emptyset_3 =$ Diámetro del tercer tramo (m ó in)

$a =$ Distancia del primer apoyo a la primera fuerza (m ó in)

$b =$ Distancia de la primera masa a la segunda fuerza (m ó in)

$c =$ Distancia de la segunda fuerza a la tercera fuerza (m ó in)

Ahora se encontraran las reacciones en los apoyos que se localizan en el punto "A" y "E":

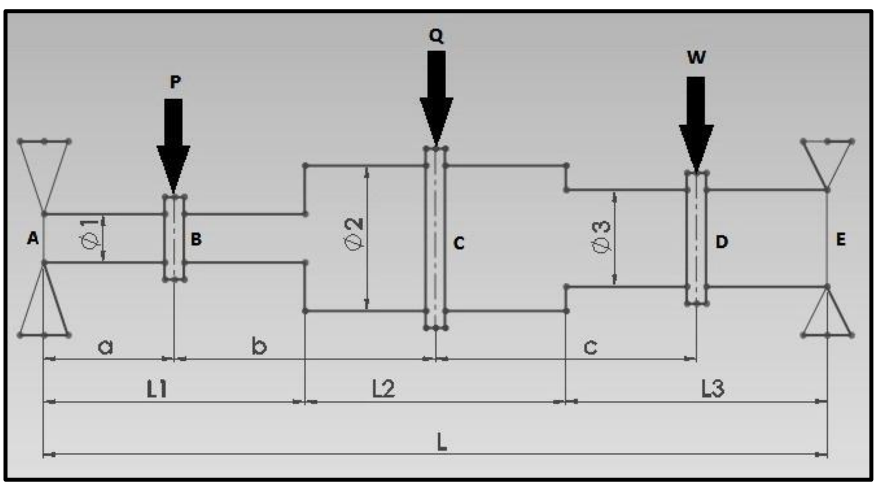


Figura 7. Cuerpo libre del eje.

$$\sum M_A = -P(a) - Q(a+b) - W(a+b+c) + R_E(L) = 0$$

$$R_E = P\left(\frac{a}{L}\right) + Q\left(\frac{a+b}{L}\right) + W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Ec. (9)}$$

$$\sum M_E = W[L-(a+b+c)] + Q[L-(a+b)] + P(L-a) - R_A(L) = 0$$

$$R_A(L) = (W + Q + P)L - W(a + b + c) - Q(a + b) - P(a)$$

$$R_A = W + Q + P - W\left(\frac{a + b + c}{L}\right) - Q\left(\frac{a + b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Ec. }(10)$$

Como ya se hizo mención anteriormente se encontrarán las deflexiones ocasionadas por las tres masas en los puntos "B", "C" y "D" utilizando el Teorema de Castigliano.

Deflexión en el punto B

Primer corte

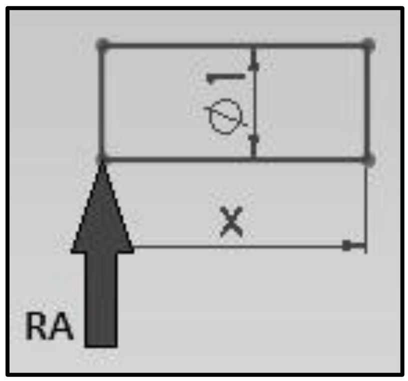


Figura 8. Primer corte

$$M_1 = R_A(x) = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a + b + c}{L}\right) - Q\left(\frac{a + b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right] x$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = \left[1 - \frac{a}{L}\right] x$$

$$\delta_{B1} = \int_0^a \left(\frac{M_1}{E_1 I_1}\right)\left(\frac{\partial M_1}{\partial P}\right) dx$$

$$\delta_{B1} = \int_0^a \left(\frac{R_A(x)}{E_1 I_1}\right)\left(\left[1 - \frac{a}{L}\right] x\right) dx$$

$$\delta_{B1} = \frac{R_A(L - a)}{E_1 I_1 L}\left\{\int_0^a x^2 dx\right\}$$

$$\delta_{B1} = \frac{R_A(L - a)}{E_1 I_1 L}\left\{\frac{1}{3} x^3 \Big|_0^a\right\}$$

$$\delta_{B1} = \frac{R_A(L-a)}{E_1 I_1 L}\left\{\frac{1}{3}(a^3 - 0)\right\}$$

$$\delta_{B1} = \frac{R_A(L-a)}{E_1 I_1 L}\left\{\frac{1}{3}a^3\right\}$$

$$\delta_{B1} = \left(\frac{1}{E_1 I_1}\right)\left(1-\frac{a}{L}\right)\left\{\frac{R_A}{3}a^3\right\}$$

$$\delta_{B1} = \left(\frac{a}{E_1 I_1}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{L}\right)\left\{\frac{R_A}{3}a^3\right\}$$

$$\delta_{B1} = \frac{a}{E_1 I_1}\left\{\frac{R_A}{3}\left(a^2-\frac{a^3}{L}\right)\right\}$$

$$\delta_{B1} = \frac{a}{E_1 I_1}\left\{R_A a^2\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{3L}\right)\right\} \ldots\ldots\ldots. \text{Ec. } (11)$$

SEGUNDO CORTE

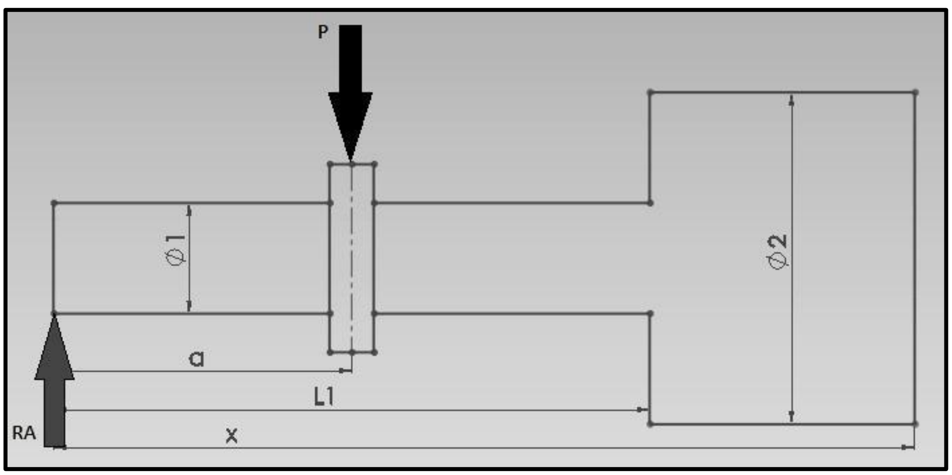


Figura 9. Segundo corte

$$M_2 = R_A(x) - P(x-a) = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = \left[1-\frac{a}{L}\right]x - (x-a) = x - \frac{a}{L}x - x + a = a - \frac{a}{L}x$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = a\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

$$\delta_{B2} = \int_{a}^{(a+b)} \left(\frac{M_2}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_2}{\partial P}\right) dx$$

Como se puede observar en la Figura 9 hay un cambio de diámetro, por lo tanto el momento de inercia cambia, entonces se tendrá que desarrollar la integral en dos partes.

$$\delta_{B2} = \int_{a}^{L_1} \left(\frac{M_2}{E_1 I_1}\right)\left(\frac{\partial M_2}{\partial P}\right) dx + \int_{L_1}^{(a+b)} \left(\frac{M_2}{E_2 I_2}\right)\left(\frac{\partial M_2}{\partial P}\right) dx$$

Se resuelve la integral por separado.

Primera integral:

$$\delta_{B2_1} = \int_{a}^{L_1} \left[\frac{R_A(x) - P(x-a)}{E_1 I_1}\right]\left[a\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right] dx$$

$$\delta_{B2_1} = \frac{a}{E_1 I_1}\left\{\int_{a}^{L_1} [R_A(x) - P(x) + P(a)]\left[1 - \frac{x}{L}\right] dx\right\}$$

$$\delta_{B2_1} = \frac{a}{E_1 I_1}\left\{\int_{a}^{L_1} [(R_A - P)x + P(a)]\left[1 - \frac{x}{L}\right] dx\right\}$$

$$\delta_{B2_1} = \frac{a}{E_1 I_1}\left\{\int_{a}^{L_1} \left[(R_A - P)x + P(a) - (R_A - P)\frac{x^2}{L} + Pa\left(\frac{x}{L}\right)\right] dx\right\}$$

$$\delta_{B2_1} = \frac{a}{E_1 I_1}\left\{\int_{a}^{L_1} \left[\left(R_A - P - P\frac{a}{L}\right)x + P(a) - (R_A - P)\frac{x^2}{L}\right] dx\right\}$$

$$\delta_{B2_1} = \frac{a}{E_1 I_1}\left\{\left(\frac{P - R_A}{L}\right)\frac{x^3}{3}\Big|_{a}^{L_1} + \left(R_A - P - P\frac{a}{L}\right)\frac{x^2}{2}\Big|_{a}^{L_1} + (Pa)x\Big|_{a}^{L_1}\right\}$$

$$\delta_{B2_1} = \frac{a}{E_1 I_1}\left\{\frac{1}{3L}[P - R_A][(L_1)^3 - a^3] + \frac{1}{2}\left[R_A - P - P\frac{a}{L}\right][(L_1)^2 - a^2] + [Pa][L_1 - a]\right\}$$

$$\delta_{B2_1} = \frac{a}{E_1 I_1}\left\{\frac{PL_1^3}{3L} - \frac{Pa^3}{3L} - \frac{R_A L_1^3}{3L} + \frac{R_A a^3}{3L} + \frac{R_A L_1^2}{2} - \frac{R_A a^2}{2} - \frac{PL_1^2}{2} + \frac{Pa^2}{2} - \frac{PaL_1^2}{2L} + \frac{Pa^3}{2L} + PaL_1 - Pa^2\right\}$$

$$\delta_{B2_1} = \frac{a}{E_1I_1}\left\{Pa\left[-\frac{a^2}{3L}+\frac{a}{2}-\frac{L_1^2}{2L}+\frac{a^2}{2L}+L_1-a\right]+PL_1\left[\frac{L_1^2}{3L}-\frac{L_1}{2}\right]+R_Aa\left[\frac{a^2}{3L}-\frac{a}{2}\right]\right.$$
$$\left.+R_AL_1\left[-\frac{L_1^2}{3L}+\frac{L_1}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{B2_1} = \frac{a}{E_1I_1}\left\{R_Aa^2\left[\frac{a}{3L}-\frac{1}{2}\right]+R_AL_1^2\left[-\frac{L_1}{3L}+\frac{1}{2}\right]+Pa\left[\frac{a^2}{6L}-\frac{a}{2}-\frac{L_1^2}{2L}+L_1\right]+PL_1^2\left[\frac{L_1}{3L}-\frac{1}{2}\right]\right\}$$

Segunda Integral:

$$\delta_{B2_2} = \int_{L_1}^{(a+b)}\left[\frac{R_A(x)-P(x-a)}{E_2I_2}\right]\left[a\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]dx$$

Como la estructura de la integral es la misma que la anterior y se observa que solo los límites a evaluar son los que cambian, se tiene lo siguiente:

$$\delta_{B2_2} = \frac{a}{E_2I_2}\left\{\left(\frac{P-R_A}{L}\right)\frac{x^3}{3}\Big|_{L_1}^{(a+b)}+\left(R_A-P-P\frac{a}{L}\right)\frac{x^2}{2}\Big|_{L_1}^{(a+b)}+(Pa)x\Big|_{L_1}^{(a+b)}\right\}$$

$$\delta_{B2_2} = \frac{a}{E_2I_2}\left\{\frac{1}{3L}[P-R_A][(a+b)^3-(L_1)^3]+\frac{1}{2}\left[R_A-P-P\frac{a}{L}\right][(a+b)^2-(L_1)^2]\right.$$
$$\left.+[Pa][(a+b)-L_1]\right\}$$

$$\delta_{B2_2} = \frac{a}{E_2I_2}\left\{\frac{P(a+b)^3}{3L}-\frac{PL_1^3}{3L}-\frac{R_A(a+b)^3}{3L}+\frac{R_AL_1^3}{3L}+\frac{R_A(a+b)^2}{2}-\frac{R_AL_1^2}{2}-\frac{P(a+b)^2}{2}+\frac{PL_1^2}{2}\right.$$
$$\left.-\frac{Pa(a+b)^2}{2L}+\frac{PL_1^2}{2L}+Pa(a+b)-PaL_1\right\}$$

$$\delta_{B2_2} = \frac{a}{E_2I_2}\left\{P(a+b)\left[\frac{(a+b)^2}{3L}-\frac{(a+b)}{2}-\frac{a(a+b)}{2L}+a\right]+PL_1\left[-\frac{L_1^2}{3L}+\frac{L_1}{2}+\frac{aL_1}{2L}-a\right]\right.$$
$$\left.+R_A(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3L}+\frac{(a+b)}{2}\right]+R_AL_1\left[\frac{L_1^2}{3L}-\frac{L_1}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{B2_2} = \frac{a}{E_2I_2}\left\{R_A(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3L}+\frac{1}{2}\right]+R_AL_1^2\left[\frac{L_1}{3L}-\frac{1}{2}\right]\right.$$
$$\left.+P(a+b)\left[\frac{(a+b)^2}{3L}-\frac{(a+b)}{2}-\frac{a(a+b)}{2L}+a\right]+PL_1\left[-\frac{L_1^2}{3L}+\frac{L_1}{2}+\frac{aL_1}{2L}-a\right]\right\}$$

$$\therefore\ \delta_{B2} = \delta_{B2_1}+\delta_{B2_2}$$

$$\delta_{B2} = \frac{a}{E_1 I_1}\left\{R_A a^2\left[\frac{a}{3L}-\frac{1}{2}\right] + R_A L_1^2\left[-\frac{L_1}{3L}+\frac{1}{2}\right] + Pa\left[\frac{a^2}{6L}-\frac{a}{2}-\frac{L_1^2}{2L}+L_1\right] + PL_1^2\left[\frac{L_1}{3L}-\frac{1}{2}\right]\right\}$$

$$+\frac{a}{E_2 I_2}\left\{R_A(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3L}+\frac{1}{2}\right] + R_A L_1^2\left[\frac{L_1}{3L}-\frac{1}{2}\right]\right.$$

$$+P(a+b)\left[\frac{(a+b)^2}{3L}-\frac{(a+b)}{2}-\frac{a(a+b)}{2L}+a\right]$$

$$\left.+PL_1\left[-\frac{L_1^2}{3L}+\frac{L_1}{2}+\frac{aL_1}{2L}-a\right]\right\} \ldots\ldots \text{Ec (12)}$$

TERCER CORTE

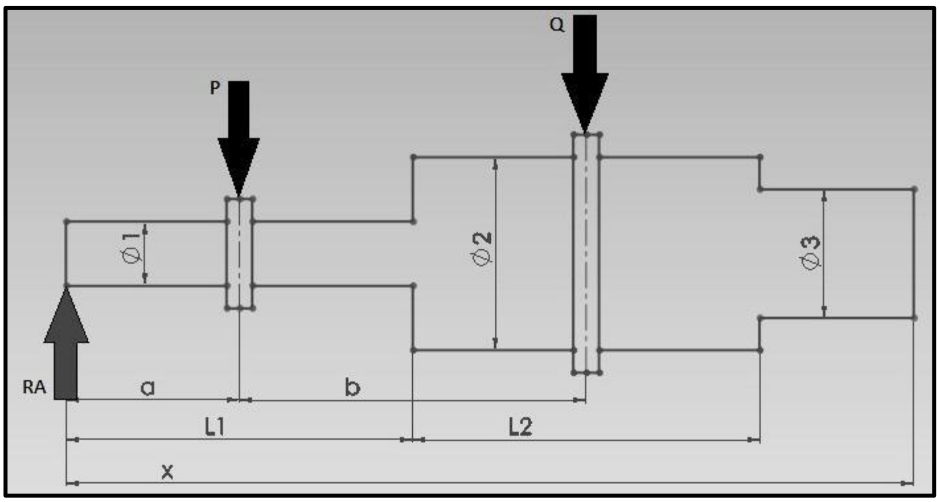


Figura10. Tercer corte

$$M_3 = R_A(x) - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$

$$M_3 = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial P} = \left[1-\frac{a}{L}\right]x - (x-a) = x - \frac{a}{L}x - x + a = a - \frac{a}{L}x$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial P} = a\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

$$\delta_{B3} = \int_{(a+b)}^{(a+b+c)} \left(\frac{M_3}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_3}{\partial P}\right) dx$$

Como se puede observar en la Figura 10 hay un cambio de diámetro, por lo tanto el momento de inercia cambia, entonces se tendrá que desarrollar la integral en dos partes.

$$\delta_{B3} = \int_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} \left(\frac{M_3}{E_2 I_2}\right)\left(\frac{\partial M_3}{\partial P}\right) dx + \int_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)} \left(\frac{M_3}{E_3 I_3}\right)\left(\frac{\partial M_3}{\partial P}\right) dx$$

Se resuelve la integral por separado.

Primera integral:

$$\delta_{B3_1} = \int_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} \left[\frac{R_A(x) - P(x-a) - Q(x-a-b)}{E_2 I_2}\right]\left[a\left(1-\frac{x}{L}\right)\right] dx$$

$$\delta_{B3_1} = \frac{a}{E_2 I_2}\left\{\int_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} [R_A x - Px + Pa - Qx + Qa + Qb]\left[1-\frac{x}{L}\right] dx\right\}$$

$$\delta_{B3_1} = \frac{a}{E_2 I_2}\left\{\int_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} \left[(R_A - P - Q)x + Pa + Qa + Qb - (R_A - P - Q)\frac{x^2}{L} - (Pa + Qa + Qb)\frac{x}{L}\right] dx\right\}$$

$$\delta_{B3_1} = \frac{a}{E_2 I_2}\left\{\left(\frac{P + Q - R_A}{L}\right)\frac{x^3}{3}\Bigg|_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} + (R_A - P - Q)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} + (Pa + Qa + Qb)x\Bigg|_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} - \left(\frac{Pa + Qa + Qb}{L}\right)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{(a+b)}^{(L_1+L_2)}\right\}$$

$$\delta_{B3_1} = \frac{a}{E_2 I_2}\left\{\left(\frac{P + Q - R_A}{L}\right)\frac{x^3}{3}\Bigg|_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} + \left(R_A - P - Q + \frac{-Pa - Qa - Qb}{L}\right)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} + (Pa + Qa + Qb)x\Bigg|_{(a+b)}^{(L_1+L_2)}\right\}$$

$$\delta_{B3_1} = \frac{a}{E_2 I_2}\left\{\frac{1}{3L}[P + Q - R_A][(L_1 + L_2)^3 - (a+b)^3] + \frac{1}{2}\left[R_A - P - Q + \frac{-Pa - Qa - Qb}{L}\right][(L_1 + L_2)^2 - (a+b)^2] + [Pa + Qa + Qb][(L_1 + L_2) - (a+b)]\right\}$$

$$\delta_{B3_1} = \frac{a}{E_2 I_2}\left\{\frac{P(L_1+L_2)^3}{3L} - \frac{P(a+b)^3}{3L} + \frac{Q(L_1+L_2)^3}{3L} - \frac{Q(a+b)^3}{3L} - \frac{R_A(L_1+L_2)^3}{3L}\right.$$

$$+ \frac{R_A(a+b)^3}{3L} + \frac{R_A(L_1+L_2)^2}{2} - \frac{R_A(a+b)^2}{2} - \frac{P(L_1+L_2)^2}{2} + \frac{P(a+b)^2}{2}$$

$$- \frac{Q(L_1+L_2)^2}{2} + \frac{Q(a+b)^2}{2} - \frac{Pa(L_1+L_2)^2}{2L} + \frac{Pa(a+b)^2}{2L} - \frac{Qa(L_1+L_2)^2}{2L}$$

$$+ \frac{Qa(a+b)^2}{2L} - \frac{Qb(L_1+L_2)^2}{2L} + \frac{Qb(a+b)^2}{2L} + Pa(L_1+L_2) - Pa(a+b)$$

$$\left. + Qa(L_1+L_2) - Qa(a+b) + Qb(L_1+L_2) - Qb(a+b)\right\}$$

$$\delta_{B3_1} = \frac{a}{E_2 I_2}\left\{P(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3L} - \frac{(L_1+L_2)}{2} - \frac{a(L_1+L_2)}{2L} + a\right]\right.$$

$$+ P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3L} + \frac{(a+b)}{2} + \frac{a(a+b)}{2L} - a\right]$$

$$+ Q(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3L} - \frac{(L_1+L_2)}{2} - \frac{a(L_1+L_2)}{2L} - \frac{b(L_1+L_2)}{2L} + a + b\right]$$

$$+ Q(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3L} + \frac{(a+b)}{2} + \frac{a(a+b)}{2L} + \frac{b(a+b)}{2L} - a - b\right]$$

$$\left. + R_A(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3L} + \frac{(L_1+L_2)}{2}\right] + R_A(a+b)\left[\frac{(a+b)^2}{3L} - \frac{(a+b)}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{B3_1} = \frac{a}{E_2 I_2}\left\{R_A(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3L} + \frac{1}{2}\right] + R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3L} - \frac{1}{2}\right]\right.$$

$$+ P(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3L} - \frac{(L_1+L_2)}{2} - \frac{a(L_1+L_2)}{2L} + a\right]$$

$$+ P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3L} + \frac{(a+b)}{2} + \frac{a(a+b)}{2L} - a\right]$$

$$+ Q(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3L} - \frac{(L_1+L_2)}{2} - \frac{(a+b)(L_1+L_2)}{2L} + (a+b)\right]$$

$$\left. + Q(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3L} - \frac{(a+b)}{2} + \frac{(a+b)}{2L}\right]\right\}$$

Segunda integral:

$$\delta_{B3_2} = \int_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)}\left[\frac{R_A(x) - P(x-a) - Q(x-a-b)}{E_3 I_3}\right]\left[a\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]$$

Como la estructura de la integral es la misma que la anterior y se observa que solo los límites a evaluar son los que cambian, se tiene lo siguiente:

$$\delta_{B3_2} = \frac{a}{E_3 I_3}\left\{\left(\frac{P + Q - R_A}{L}\right)\frac{x^3}{3}\Bigg|_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)} + \left(R_A - P - Q + \frac{-Pa - Qa - Qb}{L}\right)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)} + (Pa + Qa + Qb)x\Bigg|_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)}\right\}$$

$$\delta_{B3_2} = \frac{a}{E_3 I_3}\left\{\frac{1}{3L}[P + Q - R_A][(a+b+c)^3 - (L_1+L_2)^3] + \frac{1}{2}\left[R_A - P - Q + \frac{-Pa - Qa - Qb}{L}\right][(a+b+c)^2 - (L_1+L_2)^2] + [Pa + Qa + Qb][(a+b+c) - (L_1+L_2)]\right\}$$

$$\begin{aligned}\delta_{B3_2} = \frac{a}{E_3 I_3}\Bigg\{&\frac{P(a+b+c)^3}{3L} - \frac{P(L_1+L_2)^3}{3L} + \frac{Q(a+b+c)^3}{3L} - \frac{Q(L_1+L_2)^3}{3L} - \frac{R_A(a+b+c)^3}{3L} \\ &+ \frac{R_A(L_1+L_2)^3}{3L} + \frac{R_A(a+b+c)^2}{2} - \frac{R_A(L_1+L_2)^2}{2} - \frac{P(a+b+c)^2}{2} \\ &+ \frac{P(L_1+L_2)^2}{2} - \frac{Q(a+b+c)^2}{2} + \frac{Q(L_1+L_2)^2}{2} - \frac{Pa(a+b+c)^2}{2L} + \frac{Pa(L_1+L_2)^2}{2L} \\ &- \frac{Qa(a+b+c)^2}{2L} + \frac{Qa(L_1+L_2)^2}{2L} - \frac{Qb(a+b+c)^2}{2L} + \frac{Qb(L_1+L_2)^2}{2L} \\ &+ Pa(a+b+c) - Pa(L_1+L_2) + Qa(a+b+c) - Qa(L_1+L_2) + Qb(a+b+c) \\ &- Qb(L_1+L_2)\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\delta_{B3_2} = \frac{a}{E_3 I_3}\left\{P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3L} - \frac{(a+b+c)}{2} - \frac{a(a+b+c)}{2L} + a\right]\right.$$

$$+ P(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3L} + \frac{(L_1+L_2)}{2} + \frac{a(L_1+L_2)}{2L} - a\right]$$

$$+ Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3L} - \frac{(a+b+c)}{2} - \frac{a(a+b+c)}{2L} - \frac{b(a+b+c)}{2L} + a\right.$$

$$\left. + b\right]$$

$$+ Q(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3L} + \frac{(L_1+L_2)}{2} + \frac{a(L_1+L_2)}{2L} + \frac{b(L_1+L_2)}{2L} - a - b\right]$$

$$+ R_A(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3L} + \frac{(a+b+c)}{2}\right]$$

$$\left. + R_A(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3L} - \frac{(L_1+L_2)}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{B3_2} = \frac{a}{E_3 I_3}\left\{R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3L} + \frac{1}{2}\right] + R_A(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3L} - \frac{1}{2}\right]\right.$$

$$+ P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3L} - \frac{(a+b+c)}{2} - \frac{a(a+b+c)}{2L} + a\right]$$

$$+ P(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3L} + \frac{(L_1+L_2)}{2} + \frac{a(L_1+L_2)}{2L} - a\right]$$

$$+ Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3L} - \frac{(a+b+c)}{2} - \frac{(a+b)(a+b+c)}{2L} + (a+b)\right]$$

$$\left. + Q(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3L} + \frac{(L_1+L_2)}{2} + \frac{(a+b)(L_1+L_2)}{2L} - (a+b)\right]\right\}$$

$$\therefore\ \delta_{B3} = \delta_{B3_1} + \delta_{B3_2}$$

$$\delta_{B3} = \frac{a}{E_2 I_2}\left\{R_A(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3L}+\frac{1}{2}\right]+R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3L}-\frac{1}{2}\right]\right.$$

$$+P(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3L}-\frac{(L_1+L_2)}{2}-\frac{a(L_1+L_2)}{2L}+a\right]$$

$$+P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3L}+\frac{(a+b)}{2}+\frac{a(a+b)}{2L}-a\right]$$

$$+Q(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3L}-\frac{(L_1+L_2)}{2}-\frac{(a+b)(L_1+L_2)}{2L}+(a+b)\right]$$

$$\left.+Q(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3L}-\frac{(a+b)}{2}+\frac{(a+b)}{2L}\right]\right\}$$

$$+\frac{a}{E_3 I_3}\left\{R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3L}+\frac{1}{2}\right]+R_A(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3L}-\frac{1}{2}\right]\right.$$

$$+P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3L}-\frac{(a+b+c)}{2}-\frac{a(a+b+c)}{2L}+a\right]$$

$$+P(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3L}+\frac{(L_1+L_2)}{2}+\frac{a(L_1+L_2)}{2L}-a\right]$$

$$+Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3L}-\frac{(a+b+c)}{2}-\frac{(a+b)(a+b+c)}{2L}+(a+b)\right]$$

$$+Q(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3L}+\frac{(L_1+L_2)}{2}+\frac{(a+b)(L_1+L_2)}{2L}\right.$$

$$\left.\left.-(a+b)\right]\right\} \ldots\ldots\ldots \mathrm{Ec.}\,(13)$$

CUARTO CORTE

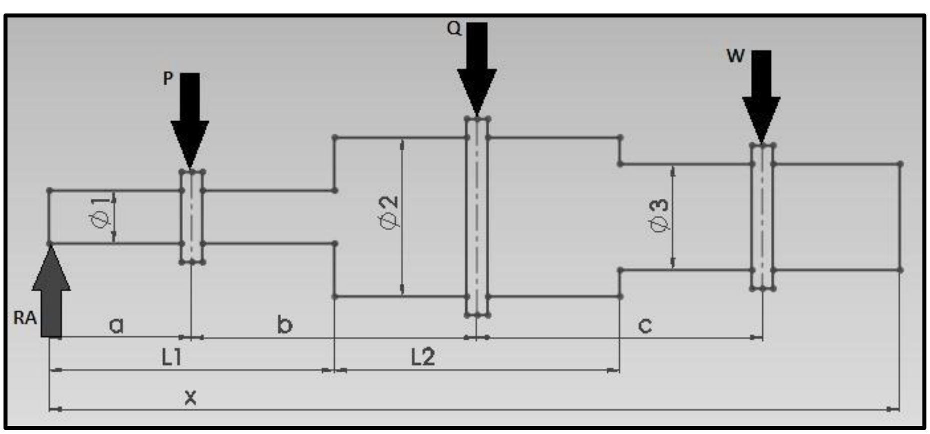


Figura 11. Cuarto corte

$$M_4 = R_A(x) - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]$$

$$M_4 = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial P} = \left[1 - \frac{a}{L}\right]x - (x-a) = x - \frac{a}{L}x - x + a = a - \frac{a}{L}x$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial P} = a\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$\delta_{B4} = \int_{(a+b+c)}^{L} \left(\frac{M_4}{E_3 I_3}\right)\left(\frac{\partial M_4}{\partial P}\right) dx$$

$$\delta_{B4} = \int_{(a+b+c)}^{L} \left[\frac{R_A(x) - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]}{E_3 I_3}\right]\left[a\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right] dx$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{E_3 I_3}\left\{\int_{(a+b+c)}^{L} [R_A x - Px + Pa - Qx + Qa + Qb - Wx + Wa + Wb + Wc]\left[1 - \frac{x}{L}\right] dx\right\}$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{E_3 I_3}\left\{\int_{(a+b+c)}^{L} \left[(R_A - P - Q - W)x + Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc - (R_A - P - Q - W)\frac{x^2}{L} - (Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc)\frac{x}{L}\right] dx\right\}$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{E_3 I_3}\left\{\left(\frac{P + Q + W - R_A}{L}\right)\frac{x^3}{3}\Big|_{(a+b+c)}^{L} + (R_A - P - Q - W)\frac{x^2}{2}\Big|_{(a+b+c)}^{L} + (Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc)x\Big|_{(a+b+c)}^{L} - \left(\frac{Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc}{L}\right)\frac{x^2}{2}\Big|_{(a+b+c)}^{L}\right\}$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{E_3 I_3}\left\{\left(\frac{P + Q + W - R_A}{L}\right)\frac{x^3}{3}\Big|_{(a+b+c)}^{L} + \left(R_A - P - Q - W + \frac{-Pa - Qa - Qb - Wa - Wb - Wc}{L}\right)\frac{x^2}{2}\Big|_{(a+b+c)}^{L} + (Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc)x\Big|_{(a+b+c)}^{L}\right\}$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{E_3 I_3}\left\{\frac{1}{3L}[P+Q+W-R_A][L^3-(a+b+c)^3] + \frac{1}{2}\left[R_A - P - Q - W + \frac{-Pa-Qa-Qb-Wa-Wb-Wc}{L}\right][L^2-(a+b+c)^2] + [Pa+Qa+Qb+Wa+Wb+Wc][L-(a+b+c)]\right\}$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{E_3 I_3}\left\{\frac{PL^3}{3L} - \frac{P(a+b+c)^3}{3L} + \frac{QL^3}{3L} - \frac{Q(a+b+c)^3}{3L} + \frac{WL^3}{3L} - \frac{W(a+b+c)^3}{3L} - \frac{R_A L^3}{3L} + \frac{R_A(a+b+c)^3}{3L} + \frac{R_A L^2}{2} - \frac{R_A(a+b+c)^2}{2} - \frac{PL^2}{2} + \frac{P(a+b+c)^2}{2} - \frac{QL^2}{2} + \frac{Q(a+b+c)^2}{2} - \frac{WL^2}{2} + \frac{W(a+b+c)^2}{2} - \frac{PaL^2}{2L} + \frac{Pa(a+b+c)^2}{2L} - \frac{QaL^2}{2L} + \frac{Qa(a+b+c)^2}{2L} - \frac{QbL^2}{2L} + \frac{Qb(a+b+c)^2}{2L} - \frac{WaL^2}{2L} + \frac{Wa(a+b+c)^2}{2L} - \frac{WbL^2}{2L} + \frac{Wb(a+b+c)^2}{2L} - \frac{WcL^2}{2L} + \frac{Wc(a+b+c)^2}{2L} + PaL - Pa(a+b+c) + QaL - Qa(a+b+c) + QbL - Qb(a+b+c) + WaL - Wa(a+b+c) + WbL - Wb(a+b+c) + WcL - Wc(a+b+c)\right\}$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{E_3 I_3}\left\{PL\left[\frac{L}{3} - \frac{L}{2} - \frac{a}{2} + a\right] + P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3L} + \frac{(a+b+c)}{2} + \frac{a(a+b+c)}{2L} - a\right] + QL\left[\frac{L}{3} - \frac{L}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + a + b\right] + Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3L} + \frac{(a+b+c)}{2} + \frac{a(a+b+c)}{2L} + \frac{b(a+b+c)}{2L} - a - b\right] + WL\left[\frac{L}{3} - \frac{L}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + a + b + c\right] + W(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3L} + \frac{(a+b+c)}{2} + \frac{a(a+b+c)}{2L} + \frac{b(a+b+c)}{2L} + \frac{c(a+b+c)}{2L} - a - b - c\right] + R_A L\left[-\frac{L}{3} + \frac{L}{2}\right] + R_A(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3L} - \frac{(a+b+c)}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{E_3 I_3}\Bigg\{R_A L^2\left[\frac{1}{6}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3L} - \frac{1}{2}\right] + PL\left[-\frac{L}{6} + \frac{a}{2}\right]$$

$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3L} + \frac{(a+b+c)}{2} + \frac{a(a+b+c)}{2L} - a\right]$$

$$+ QL\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b)}{2}\right]$$

$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3L} + \frac{(a+b+c)}{2} + \frac{(a+b)(a+b+c)}{2L} - (a+b)\right]$$

$$+ WL\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b+c)}{2}\right] + W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6L} - \frac{1}{2}\right]\Bigg\} \ldots\ldots \text{Ec. } (14)$$

Una vez encontradas las deflexiones ocasionadas por cada fuerza, se tiene que la deflexión total en el punto “B” es:

$$\delta_B = \delta_{B1} + \delta_{B2} + \delta_{B3} + \delta_{B4}$$

$$\delta_B = \frac{a}{E_1I_1}\left\{R_A a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{a}{3L}\right) + R_A a^2\left(\frac{a}{3L} - \frac{1}{2}\right) + R_A L_1^2\left(-\frac{L_1}{3L} + \frac{1}{2}\right) + Pa\left(\frac{a^2}{6L} - \frac{a}{2} - \frac{L_1^2}{2L} + L_1\right)\right.$$

$$\left. + PL_1\left(\frac{L_1}{3L} - \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$+ \frac{a}{E_2I_2}\left\{R_A(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3L} + \frac{1}{2}\right] + R_A L_1^2\left[\frac{L_1}{3L} - \frac{1}{2}\right]\right.$$

$$+ R_A(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3L} + \frac{1}{2}\right] + R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3L} - \frac{1}{2}\right]$$

$$+ P(a+b)\left[\frac{(a+b)^2}{3L} - \frac{(a+b)}{2} - \frac{a(a+b)}{2L} + a\right] + PL_1\left[-\frac{L_1^2}{3L} + \frac{L_1}{2} + \frac{aL_1}{2L} - a\right]$$

$$+ P(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3L} - \frac{(L_1+L_2)}{2} - \frac{a(L_1+L_2)}{2L} + a\right]$$

$$+ P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3L} + \frac{(a+b)}{2} + \frac{a(a+b)}{2L} - a\right]$$

$$+ Q(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3L} - \frac{(L_1+L_2)}{2} - \frac{(a+b)(L_1+L_2)}{2L} + (a+b)\right]$$

$$\left. + Q(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3L} - \frac{(a+b)}{2} + \frac{(a+b)}{2L}\right]\right\}$$

$$+ \frac{a}{E_3I_3}\left\{R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3L} + \frac{1}{2}\right] + R_A(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3L} - \frac{1}{2}\right]\right.$$

$$+ R_A L^2\left[\frac{1}{6}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3L} - \frac{1}{2}\right]$$

$$+ P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3L} - \frac{(a+b+c)}{2} - \frac{a(a+b+c)}{2L} + a\right]$$

$$+ P(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3L} + \frac{(L_1+L_2)}{2} + \frac{a(L_1+L_2)}{2L} - a\right] + PL\left[-\frac{L}{6} + \frac{a}{2}\right]$$

$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3L} + \frac{(a+b+c)}{2} + \frac{a(a+b+c)}{2L} - a\right]$$

$$+ Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3L} - \frac{(a+b+c)}{2} - \frac{(a+b)(a+b+c)}{2L} + (a+b)\right]$$

$$+ Q(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3L} + \frac{(L_1+L_2)}{2} + \frac{(a+b)(L_1+L_2)}{2L} - (a+b)\right]$$

$$+ QL\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b)}{2}\right]$$

$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3L} + \frac{(a+b+c)}{2} + \frac{(a+b)(a+b+c)}{2L} - (a+b)\right]$$

$$+WL\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right]+W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6L}-\frac{1}{2}\right]\Bigg\}$$

$$\delta_B=\frac{a}{E_1I_1}\left\{R_Aa^2\left[-\frac{1}{6}\right]+R_AL_1^2\left[-\frac{L_1}{3L}+\frac{1}{2}\right]+Pa\left[\frac{a^2}{6L}-\frac{a}{2}-\frac{L_1^2}{2L}+L_1\right]+PL_1^2\left[\frac{L_1}{3L}-\frac{1}{2}\right]\right\}$$

$$+\frac{a}{E_2I_2}\Bigg\{R_AL_1^2\left[\frac{L_1}{3L}-\frac{1}{2}\right]+R_A(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3L}+\frac{1}{2}\right]$$

$$+PL_1\left[-\frac{L_1^2}{3L}+\frac{L_1}{2}+\frac{aL_1}{2L}-a\right]$$

$$+P(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3L}-\frac{(L_1+L_2)}{2}-\frac{a(L_1+L_2)}{2L}+a\right]$$

$$+Q(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3L}-\frac{(L_1+L_2)}{2}-\frac{(a+b)(L_1+L_2)}{2L}+(a+b)\right]$$

$$+Q(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3L}-\frac{(a+b)}{2}+\frac{(a+b)}{2L}\right]\Bigg\}$$

$$+\frac{a}{E_3I_3}\Bigg\{R_A(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3L}-\frac{1}{2}\right]+R_AL^2\left[\frac{1}{6}\right]$$

$$+P(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3L}+\frac{(L_1+L_2)}{2}+\frac{a(L_1+L_2)}{2L}-a\right]+PL\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right]$$

$$+Q(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3L}+\frac{(L_1+L_2)}{2}+\frac{(a+b)(L_1+L_2)}{2L}-(a+b)\right]$$

$$+QL\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right]+WL\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right]$$

$$+W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6L}-\frac{1}{2}\right]\Bigg\}\ \ldots\ldots \text{Ec.}(15)$$

Deflexión en el punto C

Primer corte

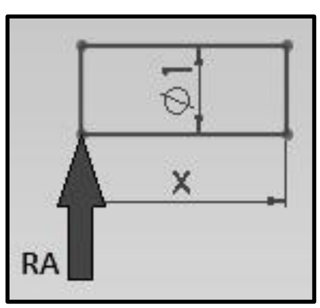


Figura 12. Primer corte

$$M_1 = R_A(x) = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial Q} = \left[1 - \frac{(a+b)}{L}\right]x$$

$$\delta_{C1} = \int_0^a \left(\frac{M_1}{E_1 I_1}\right)\left(\frac{\partial M_1}{\partial Q}\right)dx$$

$$\delta_{C1} = \int_0^a \left(\frac{R_A(x)}{E_1 I_1}\right)\left(\left[1 - \frac{(a+b)}{L}\right]x\right)dx$$

$$\delta_{C1} = \frac{R_A(L-a-b)}{E_1 I_1 L}\left\{\int_0^a x^2 dx\right\}$$

$$\delta_{C1} = \frac{R_A(L-a-b)}{E_1 I_1 L}\left\{\frac{1}{3}x^3 \Big|_0^a\right\}$$

$$\delta_{C1} = \frac{R_A(L-a-b)}{E_1 I_1 L}\left\{\frac{1}{3}(a^3 - 0)\right\}$$

$$\delta_{C1} = \frac{R_A(L-a-b)}{E_1 I_1 L}\left\{\frac{1}{3}a^3\right\}$$

$$\delta_{C1} = \frac{L-(a+b)}{E_1 I_1 L}\left\{R_A a^3\left[\frac{1}{3}\right]\right\} \ldots\ldots\ldots \text{Ec. } (16)$$

SEGUNDO CORTE

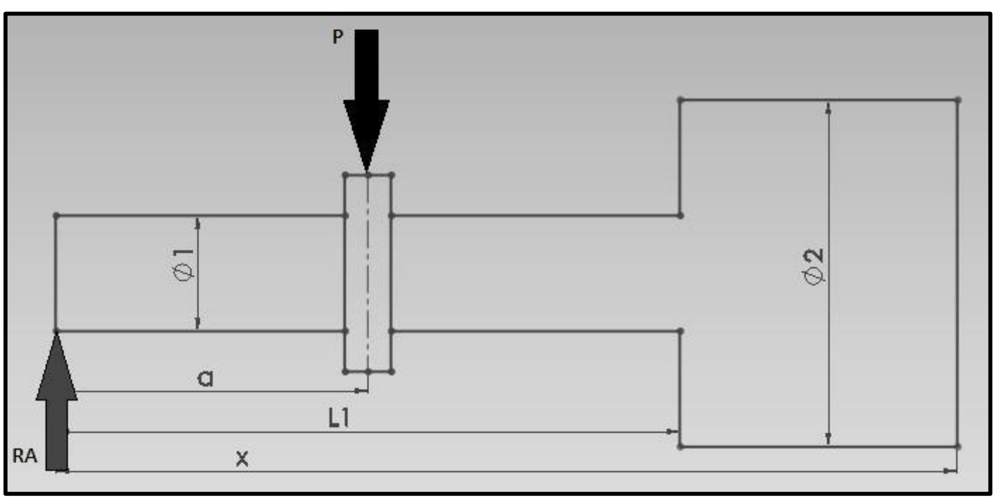


Figura 13. Segundo corte

$$M_2 = R_A(x) - P(x-a) = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial Q} = \left[1 - \frac{(a+b)}{L}\right]x$$

$$\delta_{C2} = \int_a^{(a+b)} \left(\frac{M_2}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_2}{\partial Q}\right)dx$$

Como se puede observar en la Figura 13 hay un cambio de diámetro, por lo tanto el momento de inercia cambia, entonces se tiene que desarrollar la integral en dos partes.

$$\delta_{C2} = \int_a^{L_1} \left(\frac{M_2}{E_1 I_1}\right)\left(\frac{\partial M_2}{\partial Q}\right)dx + \int_{L_1}^{(a+b)} \left(\frac{M_2}{E_2 I_2}\right)\left(\frac{\partial M_2}{\partial Q}\right)dx$$

Se resuelve la integral por separado.

Primera integral:

$$\delta_{C2_1} = \int_a^{L_1} \left[\frac{R_A(x) - P(x-a)}{E_1 I_1}\right]\left[\left(1 - \frac{(a+b)}{L}\right)x\right]dx$$

$$\delta_{C2_1} = \frac{L-a-b}{E_1 I_1 L}\left\{\int_a^{L_1} [R_A(x) - P(x) + P(a)][x]dx\right\}$$

$$\delta_{C2_1} = \frac{L-a-b}{E_1 I_1 L}\left\{\int_a^{L_1} [R_A x^2 - Px^2 + Pax]dx\right\}$$

$$\delta_{C2_1} = \frac{L-a-b}{E_1 I_1 L}\left\{\int_a^{L_1} [(R_A - P)x^2 + Pax]dx\right\}$$

$$\delta_{C2_1} = \frac{L-a-b}{E_1 I_1 L}\left\{(R_A - P)\frac{x^3}{3}\Big|_a^{L_1} + (Pa)\frac{x^2}{2}\Big|_a^{L_1}\right\}$$

$$\delta_{C2_1} = \frac{L-a-b}{E_1 I_1 L}\left\{\frac{1}{3}[R_A - P][(L_1)^3 - a^3] + \frac{1}{2}[Pa][(L_1)^2 - a^2]\right\}$$

$$\delta_{C2_1} = \frac{L-a-b}{E_1 I_1 L}\left\{\frac{R_A L_1^3}{3} - \frac{R_A a^3}{3} - \frac{PL_1^3}{3} + \frac{Pa^3}{3} + \frac{PaL_1^2}{2} - \frac{Pa^3}{2}\right\}$$

$$\delta_{C2_1} = \frac{L-a-b}{E_1 I_1 L}\left\{R_A a^3\left[-\frac{1}{3}\right] + R_A L_1^3\left[\frac{1}{3}\right] + Pa^3\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] + PL_1\left[-\frac{L_1^2}{3} + \frac{L_1 a}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{C2_1} = \frac{L-(a+b)}{E_1 I_1 L}\left\{R_A a^3\left[-\frac{1}{3}\right] + R_A L_1^3\left[\frac{1}{3}\right] + Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right] + PL_1^2\left[-\frac{L_1}{3}+\frac{a}{2}\right]\right\}$$

Segunda Integral:

$$\delta_{C2_2} = \int_{L_1}^{(a+b)}\left[\frac{R_A(x) - P(x-a)}{E_2 I_2}\right]\left[\left(1-\frac{(a+b)}{L}\right)x\right]dx$$

Como la estructura de la integral es la misma que la anterior y se observa que solo los límites a evaluar son los que cambian, se tiene lo siguiente:

$$\delta_{C2_2} = \frac{L-a-b}{E_2 I_2 L}\left\{(R_A - P)\frac{x^3}{3}\Bigg|_{L_1}^{(a+b)} + (Pa)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{L_1}^{(a+b)}\right\}$$

$$\delta_{C2_2} = \frac{L-a-b}{E_2 I_2 L}\left\{\frac{1}{3}[R_A - P][(a+b)^3 - (L_1)^3] + \frac{1}{2}[Pa][(a+b)^2 - (L_1)^2]\right\}$$

$$\delta_{C2_2} = \frac{L-a-b}{E_2 I_2 L}\left\{\frac{R_A(a+b)^3}{3} - \frac{R_A L_1^3}{3} - \frac{P(a+b)^3}{3} + \frac{PL_1^3}{3} + \frac{Pa(a+b)^2}{2} - \frac{PaL_1^2}{2}\right\}$$

$$\delta_{C2_2} = \frac{L-(a+b)}{E_2 I_2 L}\left\{R_A(a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A L_1^3\left[-\frac{1}{3}\right] + P(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3}+\frac{a}{2}\right] + PL_1^2\left[\frac{L_1}{3}-\frac{a}{2}\right]\right\}$$

$$\therefore \delta_{C2} = \delta_{C2_1} + \delta_{C2_2}$$

$$\begin{aligned}\delta_{C2} = {} & \frac{L-(a+b)}{E_1 I_1 L}\left\{R_A a^3\left[-\frac{1}{3}\right] + R_A L_1^3\left[\frac{1}{3}\right] + Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right] + PL_1^2\left[-\frac{L_1}{3}+\frac{a}{2}\right]\right\} \\ & + \frac{L-(a+b)}{E_2 I_2 L}\left\{R_A(a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A L_1^3\left[-\frac{1}{3}\right] + P(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3}+\frac{a}{2}\right]\right. \\ & \left. + PL_1^2\left[\frac{L_1}{3}-\frac{a}{2}\right]\right\} \ldots\ldots\ldots \text{Ec.}(17)\end{aligned}$$

TERCER CORTE

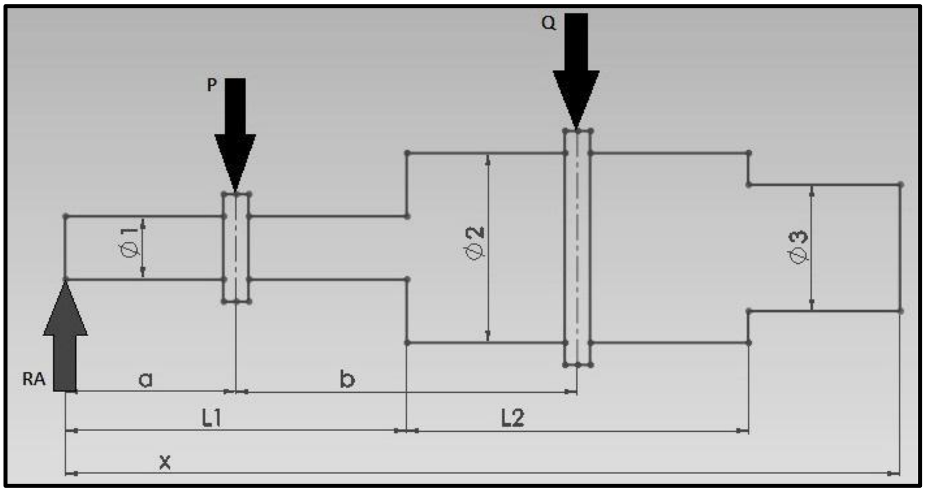


Figura 14. Tercer corte

$$M_3 = R_A(x) - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$

$$M_3 = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial Q} = \left[1 - \frac{(a+b)}{L}\right]x - [x-(a+b)] = x - \frac{(a+b)}{L}x - x + (a+b) = -\frac{(a+b)}{L}x + (a+b)$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial Q} = \frac{(a+b)}{L}(-x+L)$$

$$\delta_{C3} = \int_{(a+b)}^{(a+b+c)} \left(\frac{M_3}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_3}{\partial Q}\right) dx$$

Como se puede observar en la figura 14 también se tiene un cambio de diámetro en el eje, por consiguiente se hará lo mismo que se realizó en el segundo corte, que es resolver la integral en dos partes, por lo tanto se tiene:

$$\delta_{C3} = \int_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} \left(\frac{M_3}{E_2 I_2}\right)\left(\frac{\partial M_3}{\partial Q}\right) dx + \int_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)} \left(\frac{M_3}{E_3 I_3}\right)\left(\frac{\partial M_3}{\partial Q}\right) dx$$

Se resuelve la integral por separado:

Primera integral:

$$\delta_{C3_1} = \int_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} \left[\frac{R_A(x) - P(x-a) - Q(x-a-b)}{E_2 I_2}\right]\left[\frac{(a+b)}{L}(-x+L)\right] dx$$

$$\delta_{C3_1} = \frac{(a+b)}{E_2 I_2 L}\left\{\int_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} [R_A x - Px + Pa - Qx + Qa + Qb][L-x]\, dx\right\}$$

$$\delta_{C3_1} = \frac{(a+b)}{E_2 I_2 L}\left\{\int_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} [(R_A - P - Q)Lx + (Pa + Qa + Qb)L - (R_A - P - Q)x^2 \right.$$
$$\left. - (Pa + Qa + Qb)x]dx\right\}$$

$$\delta_{C3_1} = \frac{(a+b)}{E_2 I_2 L}\left\{(P + Q - R_A)\frac{x^3}{3}\Bigg|_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} - (Pa + Qa + Qb)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} \right.$$
$$\left. + (R_A - P - Q)L\frac{x^2}{2}\Bigg|_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} + (Pa + Qa + Qb)Lx\Bigg|_{(a+b)}^{(L_1+L_2)}\right\}$$

$$\delta_{C3_1} = \frac{(a+b)}{E_2 I_2 L}\left\{\frac{1}{3}[P + Q - R_A][(L_1 + L_2)^3 - (a+b)^3] \right.$$
$$- \frac{1}{2}[Pa + Qa + Qb][(L_1 + L_2)^2 - (a+b)^2]$$
$$+ \frac{L}{2}[R_A - P - Q][(L_1 + L_2)^2 - (a+b)^2]$$
$$\left. + L[Pa + Qa + Qb][(L_1 + L_2) - (a+b)]\right\}$$

$$\delta_{C3_1} = \frac{(a+b)}{E_2 I_2 L}\left\{\frac{P(L_1 + L_2)^3}{3} - \frac{P(a+b)^3}{3} + \frac{Q(L_1 + L_2)^3}{3} - \frac{Q(a+b)^3}{3} - \frac{R_A(L_1 + L_2)^3}{3} \right.$$
$$+ \frac{R_A(a+b)^3}{3} - \frac{Pa(L_1 + L_2)^2}{2} + \frac{Pa(a+b)^2}{2} - \frac{Qa(L_1 + L_2)^2}{2} + \frac{Qa(a+b)^2}{2}$$
$$- \frac{Qb(L_1 + L_2)^2}{2} + \frac{Qb(a+b)^2}{2} + - \frac{R_A L(L_1 + L_2)^2}{2} - \frac{R_A L(a+b)^2}{2}$$
$$- \frac{PL(L_1 + L_2)^2}{2} + \frac{PL(a+b)^2}{2} - \frac{QL(L_1 + L_2)^2}{2} + \frac{QL(a+b)^2}{2} + PLa(L_1 + L_2)$$
$$\left. - PLa(a+b) + QLa(L_1 + L_2) - QLa(a+b) + QLb(L_1 + L_2) - QLb(a+b)\right\}$$

$$\delta_{C3_1} = \frac{(a+b)}{E_2 I_2 L}\left\{P(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3} - \frac{a(L_1+L_2)}{2} - \frac{L(L_1+L_2)}{2} + La\right]\right.$$
$$+ P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3} + \frac{a(a+b)}{2} + \frac{L(a+b)}{2} - La\right]$$
$$+ Q(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3} - \frac{a(L_1+L_2)}{2} - \frac{b(L_1+L_2)}{2} - \frac{L(L_1+L_2)}{2} + La + Lb\right]$$
$$+ Q(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3} + \frac{a(a+b)}{2} + \frac{b(a+b)}{2} + \frac{L(a+b)}{2} - La - Lb\right]$$
$$\left. + R_A(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3} + \frac{L}{2}\right] + R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3} - \frac{L}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{C3_1} = \frac{(a+b)}{E_2 I_2 L}\left\{R_A(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3} + \frac{L}{2}\right] + R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3} - \frac{L}{2}\right]\right.$$
$$+ P(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3} - \frac{(a+L)(L_1+L_2)}{2} + La\right]$$
$$+ P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3} + \frac{(a+L)(a+b)}{2} - La\right]$$
$$+ Q(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3} - \frac{(a+b+L)(L_1+L_2)}{2} + L(a+b)\right]$$
$$\left. + Q(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3} + \frac{(a+b+L)(a+b)}{2} - L(a+b)\right]\right\}$$

$$\delta_{C3_1} = \frac{(a+b)}{E_2 I_2 L}\left\{R_A(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3} + \frac{L}{2}\right] + R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3} - \frac{L}{2}\right]\right.$$
$$+ P(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3} - \frac{(a+L)(L_1+L_2)}{2} + La\right]$$
$$+ P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3} + \frac{(a+L)(a+b)}{2} - La\right]$$
$$+ Q(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3} - \frac{(a+b+L)(L_1+L_2)}{2} + L(a+b)\right]$$
$$\left. + Q(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3} + \frac{(a+b)}{2} + \frac{L}{2} - L\right]\right\}$$

$$\delta_{C3_1} = \frac{(a+b)}{E_2I_2L}\left\{R_A(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3}+\frac{L}{2}\right]+R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{L}{2}\right]\right.$$

$$+P(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3}-\frac{(a+L)(L_1+L_2)}{2}+La\right]$$

$$+P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3}+\frac{(a+L)(a+b)}{2}-La\right]$$

$$+Q(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3}-\frac{(a+b+L)(L_1+L_2)}{2}+L(a+b)\right]$$

$$\left.+Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}$$

Segunda integral:

$$\delta_{C3_2} = \int_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)}\left[\frac{R_A(x)-P(x-a)-Q(x-a-b)}{E_3I_3}\right]\left[\frac{(a+b)}{L}(-x+L)\right]dx$$

Como la estructura de la integral es la misma que la anterior y se observa que solo los límites a evaluar son los que cambian, se tiene lo siguiente:

$$\delta_{C3_2} = \frac{(a+b)}{E_3I_3L}\left\{(P+Q-R_A)\frac{x^3}{3}\Bigg|_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)}-(Pa+Qa+Qb)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)}\right.$$

$$\left.+(R_A-P-Q)L\frac{x^2}{2}\Bigg|_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)}+(Pa+Qa+Qb)Lx\Bigg|_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)}\right\}$$

$$\delta_{C3_2} = \frac{(a+b)}{E_3I_3L}\left\{\frac{1}{3}[P+Q-R_A][(a+b+c)^3-(L_1+L_2)^3]\right.$$

$$-\frac{1}{2}[Pa+Qa+Qb][(a+b+c)^2-(L_1+L_2)^2]$$

$$+\frac{L}{2}[R_A-P-Q][(a+b+c)^2-(L_1+L_2)^2]$$

$$\left.+L[Pa+Qa+Qb][(a+b+c)-(L_1+L_2)]\right\}$$

$$\delta_{C3_2} = \frac{(a+b)}{E_3I_3L}\left\{\frac{P(a+b+c)^3}{3} - \frac{P(L_1+L_2)^3}{3} + \frac{Q(a+b+c)^3}{3} - \frac{Q(L_1+L_2)^3}{3} - \frac{R_A(a+b+c)^3}{3}\right.$$
$$+ \frac{R_A(L_1+L_2)^3}{3} - \frac{Pa(a+b+c)^2}{2} + \frac{Pa(L_1+L_2)^2}{2} - \frac{Qa(a+b+c)^2}{2}$$
$$+ \frac{Qa(L_1+L_2)^2}{2} - \frac{Qb(a+b+c)^2}{2} + \frac{Qb(L_1+L_2)^2}{2} + - \frac{R_AL(a+b+c)^2}{2}$$
$$- \frac{R_AL(L_1+L_2)^2}{2} - \frac{PL(a+b+c)^2}{2} + \frac{PL(L_1+L_2)^2}{2} - \frac{QL(a+b+c)^2}{2}$$
$$+ \frac{QL(L_1+L_2)^2}{2} + PLa(a+b+c) - PLa(L_1+L_2) + QLa(a+b+c)$$
$$\left. - QLa(L_1+L_2) + QLb(a+b+c) - QLb(L_1+L_2)\right\}$$

$$\delta_{C3_2} = \frac{(a+b)}{E_3I_3L}\left\{P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3} - \frac{a(a+b+c)}{2} - \frac{L(a+b+c)}{2} + La\right]\right.$$
$$+ P(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3} + \frac{a(L_1+L_2)}{2} + \frac{L(L_1+L_2)}{2} - La\right]$$
$$+ Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3} - \frac{a(a+b+c)}{2} - \frac{b(a+b+c)}{2} - \frac{L(a+b+c)}{2} + La\right.$$
$$\left. + Lb\right]$$
$$+ Q(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3} + \frac{a(L_1+L_2)}{2} + \frac{b(L_1+L_2)}{2} + \frac{L(L_1+L_2)}{2} - La - Lb\right]$$
$$\left. + R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3} + \frac{L}{2}\right] + R_A(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3} - \frac{L}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{C3_2} = \frac{(a+b)}{E_3I_3L}\left\{R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3} + \frac{L}{2}\right] + R_A(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3} - \frac{L}{2}\right]\right.$$
$$+ P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3} - \frac{(a+L)(a+b+c)}{2} + La\right]$$
$$+ P(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3} + \frac{(a+L)(L_1+L_2)}{2} - La\right]$$
$$+ Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3} - \frac{(a+b+L)(a+b+c)}{2} + L(a+b)\right]$$
$$\left. + Q(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3} + \frac{(a+b+L)(L_1+L_2)}{2} - L(a+b)\right]\right\}$$

$\therefore\ \delta_{C3} = \delta_{C3_1} + \delta_{C3_2}$

$$\delta_{C3} = \frac{(a+b)}{E_2I_2L}\left\{R_A(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3}+\frac{L}{2}\right]+R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{L}{2}\right]\right.$$
$$+P(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3}-\frac{(a+L)(L_1+L_2)}{2}+La\right]$$
$$+P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3}+\frac{(a+L)(a+b)}{2}-La\right]$$
$$+Q(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3}-\frac{(a+b+L)(L_1+L_2)}{2}+L(a+b)\right]$$
$$\left.+Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}$$
$$+\frac{(a+b)}{E_3I_3L}\left\{R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{L}{2}\right]+R_A(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3}-\frac{L}{2}\right]\right.$$
$$+P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{(a+L)(a+b+c)}{2}+La\right]$$
$$+P(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3}+\frac{(a+L)(L_1+L_2)}{2}-La\right]$$
$$+Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{(a+b+L)(a+b+c)}{2}+L(a+b)\right]$$
$$\left.+Q(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3}+\frac{(a+b+L)(L_1+L_2)}{2}-L(a+b)\right]\right\}\ \ldots\ldots\ldots \text{Ec. (18)}$$

CUARTO CORTE

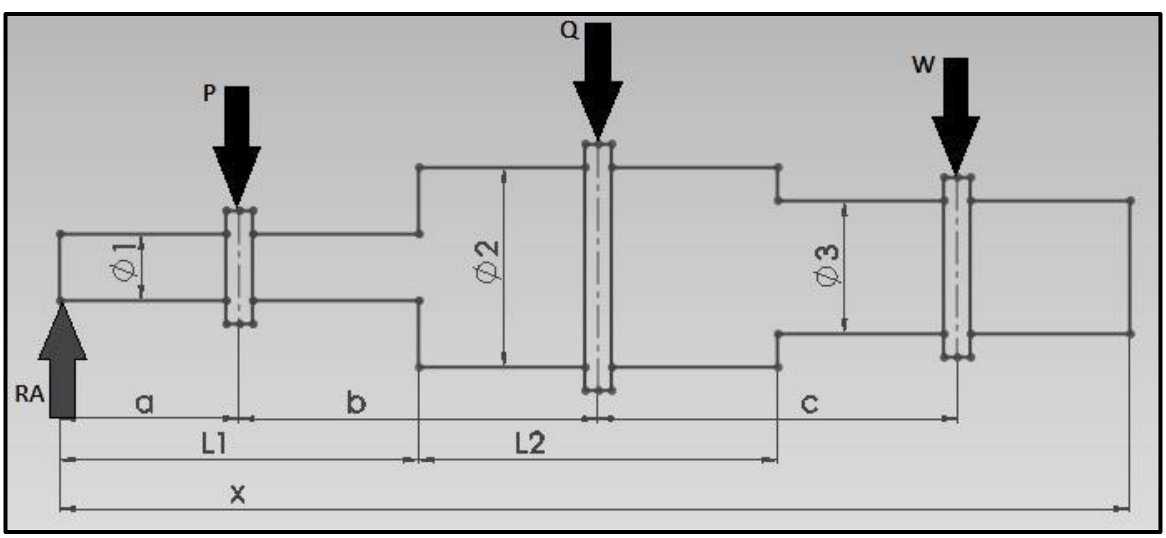


Figura 15. Cuarto corte

$$M_4 = R_A(x) - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]$$

$$M_4 = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$
$$- W[x-(a+b+c)]$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial Q} = \left[1 - \frac{(a+b)}{L}\right]x - [x-(a+b)] = x - \frac{(a+b)}{L}x - x + (a+b) = -\frac{(a+b)}{L}x + (a+b)$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial Q} = \frac{(a+b)}{L}(-x+L)$$

$$\delta_{C4} = \int_{(a+b+c)}^{L}\left(\frac{M_4}{E_3I_3}\right)\left(\frac{\partial M_4}{\partial Q}\right)dx$$

$$\delta_{C4} = \int_{(a+b+c)}^{L}\left[\frac{R_A(x) - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]}{E_3I_3}\right]\left[\frac{(a+b)}{L}(-x+L)\right]dx$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{E_3I_3L}\left\{\int_{(a+b+c)}^{L}[R_Ax - Px + Pa - Qx + Qa + Qb - Wx + Wa + Wb + Wc][L-x]\,dx\right\}$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{E_3I_3L}\left\{\int_{(a+b+c)}^{L}[(R_A - P - Q - W)xL + (Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc)L\right.$$
$$\left. - (R_A - P - Q - W)x^2 - (Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc)x]dx\right\}$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{E_3I_3L}\left\{(P + Q + W - R_A)\frac{x^3}{3}\Bigg|_{(a+b+c)}^{L}\right.$$
$$- (Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{(a+b+c)}^{L}$$
$$+ (R_A - P - Q - W)L\frac{x^2}{2}\Bigg|_{(a+b+c)}^{L}$$
$$\left. + (Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc)Lx\Bigg|_{(a+b+c)}^{L}\right\}$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{E_3 I_3 L}\left\{\frac{1}{3}[P+Q+W-R_A][L^3-(a+b+c)^3]\right.$$
$$-\frac{1}{2}[Pa+Qa+Qb+Wa+Wb+Wc][L^2-(a+b+c)^2]$$
$$+\frac{L}{2}[R_A-P-Q-W][L^2-(a+b+c)^2]$$
$$\left.+L[Pa+Qa+Qb+Wa+Wb+Wc][L-(a+b+c)]\right\}$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{E_3 I_3 L}\left\{\frac{PL^3}{3}-\frac{P(a+b+c)^3}{3}+\frac{QL^3}{3}-\frac{Q(a+b+c)^3}{3}+\frac{WL^3}{3}-\frac{W(a+b+c)^3}{3}-\frac{R_A L^3}{3}\right.$$
$$+\frac{R_A(a+b+c)^3}{3}-\frac{PaL^2}{2}+\frac{Pa(a+b+c)^2}{2}-\frac{QaL^2}{2}+\frac{Qa(a+b+c)^2}{2}-\frac{QbL^2}{2}$$
$$+\frac{Qb(a+b+c)^2}{2}-\frac{WaL^2}{2}+\frac{Wa(a+b+c)^2}{2}-\frac{WbL^2}{2}+\frac{Wb(a+b+c)^2}{2}-\frac{WcL^2}{2}$$
$$+\frac{Wc(a+b+c)^2}{2}+\frac{R_A L^3}{2}-\frac{R_A L(a+b+c)^2}{2}-\frac{PL^3}{2}+\frac{PL(a+b+c)^2}{2}-\frac{QL^3}{2}$$
$$+\frac{QL(a+b+c)^2}{2}-\frac{WL^3}{2}+\frac{WL(a+b+c)^2}{2}+PaL^2-PaL(a+b+c)+QaL^2$$
$$-QaL(a+b+c)+QbL^2-QbL(a+b+c)+WaL^2-WaL(a+b+c)+WbL^2$$
$$\left.-WbL(a+b+c)+WcL^2-WcL(a+b+c)\right\}$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{E_3I_3L}\left\{PL\left[\frac{L^2}{3} - \frac{aL}{2} - \frac{L^2}{2} + aL\right]\right.$$

$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{a(a+b+c)}{2} + \frac{L(a+b+c)}{2} - aL\right]$$

$$+ QL\left[\frac{L^2}{3} - \frac{aL}{2} - \frac{bL}{2} - \frac{L^2}{2} + aL + bL\right]$$

$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{a(a+b+c)}{2} + \frac{b(a+b+c)}{2} + \frac{L(a+b+c)}{2}\right.$$

$$\left. - aL - bL\right] + WL\left[\frac{L^2}{3} - \frac{aL}{2} - \frac{bL}{2} - \frac{cL}{2} - \frac{L^2}{2} + aL + bL + cL\right]$$

$$+ W(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{a(a+b+c)}{2} + \frac{b(a+b+c)}{2} + \frac{c(a+b+c)}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{L(a+b+c)}{2} - aL - bL - cL\right] + R_AL^3\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right]$$

$$\left. + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3} - \frac{L}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{E_3I_3L}\left\{R_AL^3\left[\frac{1}{6}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3} - \frac{L}{2}\right] + PL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{a}{2}\right]\right.$$

$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{(a+L)(a+b+c)}{2} - aL\right]$$

$$+ QL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b)}{2}\right]$$

$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{(a+b+L)(a+b+c)}{2} - L(a+b)\right]$$

$$\left. + WL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b+c)}{2}\right] + W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6} - \frac{L}{2}\right]\right\} \ldots \text{Ec. } (19)$$

Una vez encontradas las deflexiones ocasionadas por cada fuerza, se tiene que la deflexión total en el punto “C” es:

$$\delta_C = \delta_{C1} + \delta_{C2} + \delta_{C3} + \delta_{C4}$$

$$
\begin{aligned}
\delta_C = {} & \frac{L-(a+b)}{E_1 I_1 L}\left\{R_A a^3\left[\frac{1}{3}\right]+R_A a^3\left[-\frac{1}{3}\right]+R_A L_1^3\left[\frac{1}{3}\right]+Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right]+PL_1^2\left[-\frac{L_1}{3}+\frac{a}{2}\right]\right\} \\
& +\frac{L-(a+b)}{E_2 I_2 L}\left\{R_A(a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right]+R_A L_1^3\left[-\frac{1}{3}\right]+P(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3}+\frac{a}{2}\right]\right. \\
& \left.+PL_1^2\left[\frac{L_1}{3}-\frac{a}{2}\right]\right\} \\
& +\frac{(a+b)}{E_2 I_2 L}\left\{R_A(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3}+\frac{L}{2}\right]+R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{L}{2}\right]\right. \\
& +P(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3}-\frac{(a+L)(L_1+L_2)}{2}+La\right] \\
& +P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3}+\frac{(a+L)(a+b)}{2}-La\right] \\
& +Q(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3}-\frac{(a+b+L)(L_1+L_2)}{2}+L(a+b)\right] \\
& \left.+Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\} \\
& +\frac{(a+b)}{E_3 I_3 L}\left\{R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{L}{2}\right]+R_A(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3}-\frac{L}{2}\right]\right. \\
& +P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{(a+L)(a+b+c)}{2}+La\right] \\
& +P(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3}+\frac{(a+L)(L_1+L_2)}{2}-La\right] \\
& +Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{(a+b+L)(a+b+c)}{2}+L(a+b)\right] \\
& +Q(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3}+\frac{(a+b+L)(L_1+L_2)}{2}-L(a+b)\right]+R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] \\
& +R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3}-\frac{L}{2}\right]+PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right] \\
& +P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(a+L)(a+b+c)}{2}-aL\right] \\
& +QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right] \\
& +Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(a+b+L)(a+b+c)}{2}-L(a+b)\right] \\
& \left.+WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right]+W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_C = {} & \frac{L-(a+b)}{E_1 I_1 L}\left\{R_A L_1^3\left[\frac{1}{3}\right] + P L_1^2\left[-\frac{L_1}{3}+\frac{a}{2}\right] + P a^3\left[-\frac{1}{6}\right]\right\} \\
& + \frac{(a+b)}{E_2 I_2 L}\left\{\left(\frac{L-(a+b)}{a+b}\right)\left(R_A (a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A L_1^3\left[-\frac{1}{3}\right]\right.\right. \\
& \left. + P(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3}+\frac{a}{2}\right] + P L_1^2\left[\frac{L_1}{3}-\frac{a}{2}\right]\right) + R_A (L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3}+\frac{L}{2}\right] \\
& + R_A (a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{L}{2}\right] + P(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3}-\frac{(a+L)(L_1+L_2)}{2}+La\right] \\
& + P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3}+\frac{(a+L)(a+b)}{2}-La\right] \\
& + Q(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3}-\frac{(a+b+L)(L_1+L_2)}{2}+L(a+b)\right] \\
& \left. + Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\} \\
& + \frac{(a+b)}{E_3 I_3 L}\left\{R_A (L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3}-\frac{L}{2}\right]\right. \\
& + P(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3}+\frac{(a+L)(L_1+L_2)}{2}-La\right] \\
& + Q(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3}+\frac{(a+b+L)(L_1+L_2)}{2}-L(a+b)\right] + R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] \\
& + P L^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right] + Q L^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right] + W L^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right] \\
& \left. + W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\} \ldots\ldots\ldots \text{Ec. } (20)
\end{aligned}
$$

Deflexión en el punto D

PRIMER CORTE

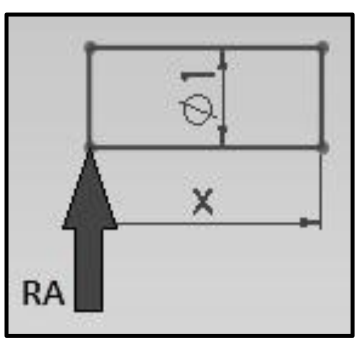


Figura 16. Primer corte.

$$M_1 = R_A(x) = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial W} = \left[1 - \frac{(a+b+c)}{L}\right]x$$

$$\delta_{D1} = \int_0^a \left(\frac{M_1}{E_1 I_1}\right)\left(\frac{\partial M_1}{\partial W}\right)dx$$

$$\delta_{D1} = \int_0^a \left(\frac{R_A(x)}{E_1 I_1}\right)\left(\left[1 - \frac{(a+b+c)}{L}\right]x\right)dx$$

$$\delta_{D1} = \frac{R_A[L-(a+b+c)]}{E_1 I_1 L}\left\{\int_0^a x^2 dx\right\}$$

$$\delta_{D1} = \frac{R_A[L-(a+b+c)]}{E_1 I_1 L}\left\{\frac{1}{3}x^3 \Big|_0^a\right\}$$

$$\delta_{D1} = \frac{R_A[L-(a+b+c)]}{E_1 I_1 L}\left\{\frac{1}{3}(a^3 - 0)\right\}$$

$$\delta_{D1} = \frac{R_A[L-(a+b+c)]}{E_1 I_1 L}\left\{\frac{1}{3}a^3\right\}$$

$$\delta_{D1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_1 I_1 L}\left\{R_A a^3 \left[\frac{1}{3}\right]\right\} \dots\dots\dots \mathrm{Ec.}\,(21)$$

SEGUNDO CORTE

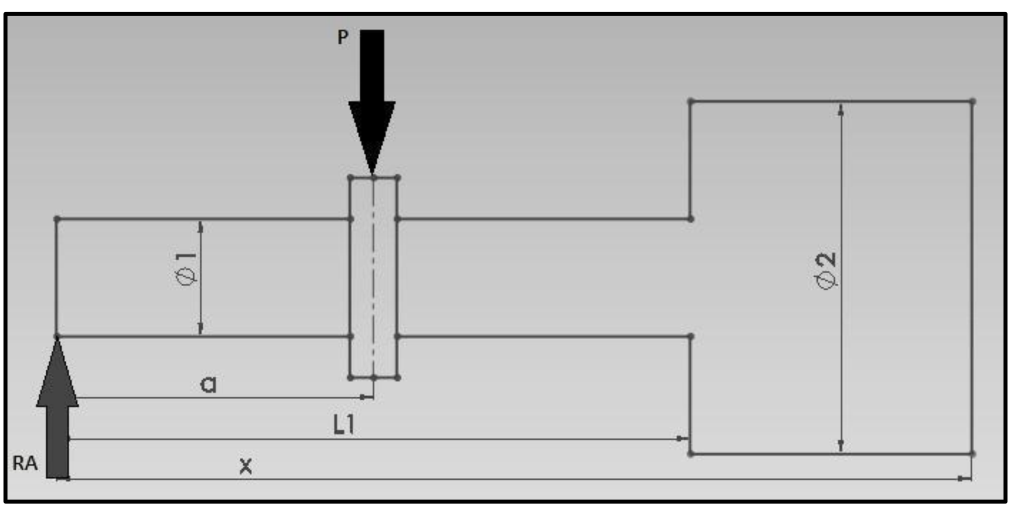


Figura 17. Segundo corte.

$$M_2 = R_A(x) - P(x-a) = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial W} = \left[1 - \frac{(a+b+c)}{L}\right]x$$

$$\delta_{D2} = \int_a^{(a+b)} \left(\frac{M_2}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_2}{\partial W}\right) dx$$

Como se puede observar en la figura 17 hay un cambio de diámetro, por lo tanto el momento de inercia cambia, entonces se tendrá que desarrollar la integral en dos partes.

$$\delta_{D2} = \int_a^{L_1} \left(\frac{M_2}{E_1 I_1}\right)\left(\frac{\partial M_2}{\partial W}\right) dx + \int_{L_1}^{(a+b)} \left(\frac{M_2}{E_2 I_2}\right)\left(\frac{\partial M_2}{\partial W}\right) dx$$

Se resuelve la integral por separado:

Primera integral:

$$\delta_{D2_1} = \int_a^{L_1} \left[\frac{R_A(x) - P(x-a)}{E_1 I_1}\right]\left[\left(1 - \frac{(a+b+c)}{L}\right)x\right] dx$$

$$\delta_{D2_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_1 I_1 L}\left\{\int_a^{L_1} [R_A(x) - P(x) + P(a)][x]dx\right\}$$

$$\delta_{D2_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_1 I_1 L}\left\{\int_a^{L_1} [R_A x^2 - Px^2 + Pax]dx\right\}$$

$$\delta_{D2_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_1 I_1 L}\left\{\int_a^{L_1} [(R_A - P)x^2 + Pax]dx\right\}$$

$$\delta_{D2_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_1 I_1 L}\left\{(R_A - P)\frac{x^3}{3}\Big|_a^{L_1} + (Pa)\frac{x^2}{2}\Big|_a^{L_1}\right\}$$

$$\delta_{D2_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_1 I_1 L}\left\{\frac{1}{3}[R_A - P][(L_1)^3 - a^3] + \frac{1}{2}[Pa][(L_1)^2 - a^2]\right\}$$

$$\delta_{D2_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_1 I_1 L}\left\{\frac{R_A L_1^3}{3} - \frac{R_A a^3}{3} - \frac{PL_1^3}{3} + \frac{Pa^3}{3} + \frac{PaL_1^2}{2} - \frac{Pa^3}{2}\right\}$$

$$\delta_{D2_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_1 I_1 L}\left\{R_A a^3\left[-\frac{1}{3}\right] + R_A L_1^3\left[\frac{1}{3}\right] + Pa^3\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] + PL_1\left[-\frac{L_1^2}{3} + \frac{L_1 a}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{D2_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_1 I_1 L}\left\{R_A a^3\left[-\frac{1}{3}\right] + R_A L_1^3\left[\frac{1}{3}\right] + Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right] + PL_1^2\left[-\frac{L_1}{3}+\frac{a}{2}\right]\right\}$$

Segunda Integral:

$$\delta_{D2_2} = \int_{L_1}^{(a+b)} \left[\frac{R_A(x) - P(x-a)}{E_2 I_2}\right]\left[\left(1-\frac{(a+b+c)}{L}\right)x\right]dx$$

Como la estructura de la integral es la misma que la anterior y se observa que solo los límites a evaluar son los que cambian, se tiene lo siguiente:

$$\delta_{D2_2} = \frac{L-(a+b+c)}{E_2 I_2 L}\left\{(R_A - P)\frac{x^3}{3}\bigg|_{L_1}^{(a+b)} + (Pa)\frac{x^2}{2}\bigg|_{L_1}^{(a+b)}\right\}$$

$$\delta_{D2_2} = \frac{L-(a+b+c)}{E_2 I_2 L}\left\{\frac{1}{3}[R_A - P][(a+b)^3 - (L_1)^3] + \frac{1}{2}[Pa][(a+b)^2 - (L_1)^2]\right\}$$

$$\delta_{D2_2} = \frac{L-(a+b+c)}{E_2 I_2 L}\left\{\frac{R_A(a+b)^3}{3} - \frac{R_A L_1^3}{3} - \frac{P(a+b)^3}{3} + \frac{PL_1^3}{3} + \frac{Pa(a+b)^2}{2} - \frac{PaL_1^2}{2}\right\}$$

$$\delta_{D2_2} = \frac{L-(a+b+c)}{E_2 I_2 L}\left\{R_A(a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A L_1^3\left[-\frac{1}{3}\right] + P(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3}+\frac{a}{2}\right]\right.$$
$$\left. + PL_1^2\left[\frac{L_1}{3}-\frac{a}{2}\right]\right\}$$

$$\therefore \delta_D = \delta_{D2_1} + \delta_{D2_2}$$

$$\delta_{D2} = \frac{L-(a+b+c)}{E_1 I_1 L}\left\{R_A a^3\left[-\frac{1}{3}\right] + R_A L_1^3\left[\frac{1}{3}\right] + Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right] + PL_1^2\left[-\frac{L_1}{3}+\frac{a}{2}\right]\right\}$$
$$+ \frac{L-(a+b+c)}{E_2 I_2 L}\left\{R_A(a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A L_1^3\left[-\frac{1}{3}\right] + P(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3}+\frac{a}{2}\right]\right.$$
$$\left. + PL_1^2\left[\frac{L_1}{3}-\frac{a}{2}\right]\right\} \ldots\ldots\ldots \text{Ec. (22)}$$

TERCER CORTE

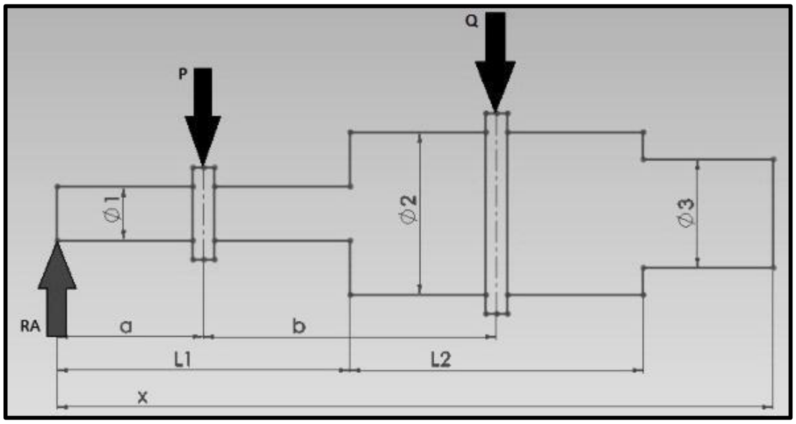


Figura 18. Tercer corte.

$$M_3 = R_A(x) - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$

$$M_3 = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial W} = \left[1 - \frac{(a+b+c)}{L}\right]x$$

$$\delta_{D3} = \int_{(a+b)}^{(a+b+c)} \left(\frac{M_3}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_3}{\partial W}\right)dx$$

Como se puede observar en la figura 18 también se tiene un cambio de diámetro en el eje, por consiguiente se hará lo mismo que se realizó en el segundo corte, que es resolver la integral en dos partes, por lo tanto se tiene:

$$\delta_{D3} = \int_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} \left(\frac{M_3}{E_2I_2}\right)\left(\frac{\partial M_3}{\partial W}\right)dx + \int_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)} \left(\frac{M_3}{E_3I_3}\right)\left(\frac{\partial M_3}{\partial W}\right)dx$$

Se resuelve la integral por separado.

Primera integral:

$$\delta_{D3_1} = \int_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} \left[\frac{R_A(x) - P(x-a) - Q(x-a-b)}{E_2I_2}\right]\left[\left(1 - \frac{(a+b+c)}{L}\right)x\right]dx$$

$$\delta_{D3_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_2I_2L}\left\{\int_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} [R_A(x) - P(x) + P(a) - Q(x) + Q(a) + Q(b)][x]dx\right\}$$

$$\delta_{D3_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_2I_2L}\left\{\int_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} [R_A x^2 - Px^2 + Pax - Qx^2 + Qax + Qbx]dx\right\}$$

$$\delta_{D3_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_2I_2L}\left\{\int_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} [(R_A - P - Q)x^2 + (Pa + Qa + Qb)x]dx\right\}$$

$$\delta_{D3_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_2I_2L}\left\{(R_A - P - Q)\frac{x^3}{3}\bigg|_{(a+b)}^{(L_1+L_2)} + (Pa + Qa + Qb)\frac{x^2}{2}\bigg|_{(a+b)}^{(L_1+L_2)}\right\}$$

$$\delta_{D3_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_2I_2L}\left\{\frac{1}{3}[R_A - P - Q][(L_1+L_2)^3 - (a+b)^3] + \frac{1}{2}[Pa + Qa + Qb][(L_1+L_2)^2 - (a+b)^2]\right\}$$

$$\delta_{D3_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_2I_2L}\left\{\frac{R_A(L_1+L_2)^3}{3} - \frac{R_A(a+b)^3}{3} - \frac{P(L_1+L_2)^3}{3} + \frac{P(a+b)^3}{3} - \frac{Q(L_1+L_2)^3}{3} + \frac{Q(a+b)^3}{3} + \frac{Pa(L_1+L_2)^2}{2} - \frac{Pa(a+b)^2}{2} + \frac{Qa(L_1+L_2)^2}{2} - \frac{Qa(a+b)^2}{2} + \frac{Qb(L_1+L_2)^2}{2} - \frac{Qb(a+b)^2}{2}\right\}$$

$$\delta_{D3_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_2I_2L}\left\{R_A(L_1+L_2)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A(a+b)^3\left[-\frac{1}{3}\right] + P(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3} + \frac{a(L_1+L_2)}{2}\right] + P(a+b)\left[\frac{(a+b)^2}{3} - \frac{a(a+b)}{2}\right] + Q(L_1+L_2)\left[-\frac{(L_1+L_2)^2}{3} + \frac{a(L_1+L_2)}{2} + \frac{b(L_1+L_2)}{2}\right] + Q(a+b)\left[\frac{(a+b)^2}{3} - \frac{a(a+b)}{2} - \frac{b(a+b)}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{D3_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_2I_2L}\left\{R_A(L_1+L_2)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A(a+b)^3\left[-\frac{1}{3}\right] + P(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3} + \frac{a}{2}\right] + P(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3} - \frac{a}{2}\right] + Q(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3} + \frac{(a+b)}{2}\right] + Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3} - \frac{(a+b)}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{D3_1} = \frac{L-(a+b+c)}{E_2I_2L}\left\{R_A(L_1+L_2)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A(a+b)^3\left[-\frac{1}{3}\right] + P(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3}+\frac{a}{2}\right] + P(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{a}{2}\right] + Q(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3}+\frac{(a+b)}{2}\right] + Q(a+b)^3\left[-\frac{1}{6}\right]\right\}$$

Segunda integral:

$$\delta_{D3_2} = \int_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)}\left[\frac{R_A(x)-P(x-a)-Q(x-a-b)}{E_3I_3}\right]\left[\left(1-\frac{(a+b+c)}{L}\right)x\right]dx$$

Como la estructura de la integral es la misma que la anterior y se observa que solo los límites a evaluar son los que cambian, se tiene lo siguiente:

$$\delta_{D3_2} = \frac{L-(a+b+c)}{E_3I_3L}\left\{(R_A-P-Q)\frac{x^3}{3}\bigg|_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)} + (Pa+Qa+Qb)\frac{x^2}{2}\bigg|_{(L_1+L_2)}^{(a+b+c)}\right\}$$

$$\delta_{D3_2} = \frac{L-(a+b+c)}{E_3I_3L}\left\{\frac{1}{3}[R_A-P-Q][(a+b+c)^3-(L_1+L_2)^3] + \frac{1}{2}[Pa+Qa+Qb][(a+b+c)^2-(L_1+L_2)^2]\right\}$$

$$\delta_{D3_2} = \frac{L-(a+b+c)}{E_3I_3L}\left\{\frac{R_A(a+b+c)^3}{3}-\frac{R_A(L_1+L_2)^3}{3}-\frac{P(a+b+c)^3}{3}+\frac{P(L_1+L_2)^3}{3} - \frac{Q(a+b+c)^3}{3}+\frac{Q(L_1+L_2)^3}{3}+\frac{Pa(a+b+c)^2}{2}-\frac{Pa(L_1+L_2)^2}{2} + \frac{Qa(a+b+c)^2}{2}-\frac{Qa(L_1+L_2)^2}{2}+\frac{Qb(a+b+c)^2}{2}-\frac{Qb(L_1+L_2)^2}{2}\right\}$$

$$\delta_{D3_2} = \frac{L-(a+b+c)}{E_3I_3L}\Bigg\{R_A(a+b+c)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A(L_1+L_2)^3\left[-\frac{1}{3}\right]$$
$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{a(a+b+c)}{2}\right]$$
$$+ P(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3}-\frac{a(L_1+L_2)}{2}\right]$$
$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{a(a+b+c)}{2}+\frac{b(a+b+c)}{2}\right]$$
$$+ Q(L_1+L_2)\left[\frac{(L_1+L_2)^2}{3}-\frac{a(L_1+L_2)}{2}-\frac{b(L_1+L_2)}{2}\right]\Bigg\}$$

$$\delta_{D3_2} = \frac{L-(a+b+c)}{E_3I_3L}\Bigg\{R_A(a+b+c)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A(L_1+L_2)^3\left[-\frac{1}{3}\right]$$
$$+ P(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{a}{2}\right] + P(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3}-\frac{a}{2}\right]$$
$$+ Q(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{(a+b)}{2}\right] + Q(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3}-\frac{(a+b)}{2}\right]\Bigg\}$$

$$\therefore\ \delta_{D3} = \delta_{D3_1} + \delta_{D3_2}$$

$$\delta_{D3} = \frac{L-(a+b+c)}{E_2I_2L}\Bigg\{R_A(L_1+L_2)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A(a+b)^3\left[-\frac{1}{3}\right] + P(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3}+\frac{a}{2}\right]$$
$$+ P(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{a}{2}\right] + Q(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3}+\frac{(a+b)}{2}\right]$$
$$+ Q(a+b)^3\left[-\frac{1}{6}\right]\Bigg\}$$
$$+ \frac{L-(a+b+c)}{E_3I_3L}\Bigg\{R_A(a+b+c)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A(L_1+L_2)^3\left[-\frac{1}{3}\right]$$
$$+ P(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{a}{2}\right] + P(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3}-\frac{a}{2}\right]$$
$$+ Q(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{(a+b)}{2}\right]$$
$$+ Q(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3}-\frac{(a+b)}{2}\right]\Bigg\} \ldots\ldots\ldots \text{Ec. } (23)$$

CUARTO CORTE

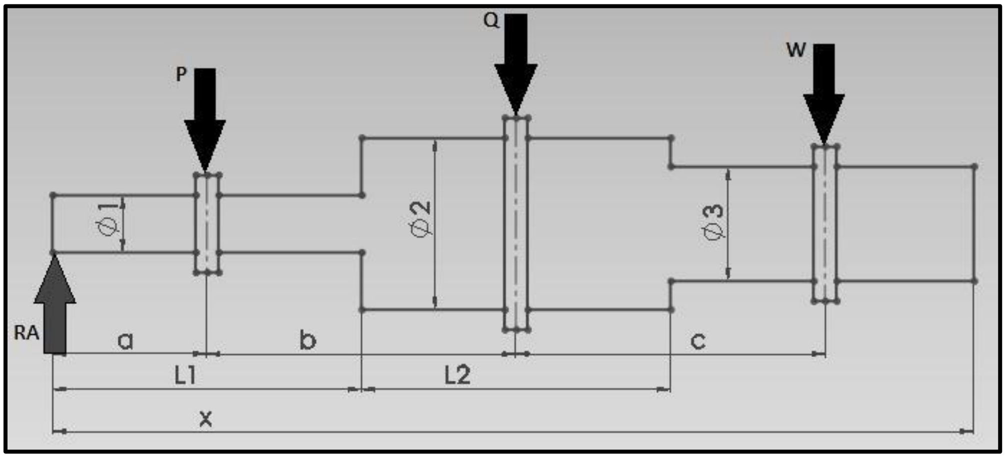


Figura 19. Cuarto corte.

$$M_4 = R_A(x) - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]$$

$$M_4 = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial W} = \left[1 - \frac{(a+b+c)}{L}\right]x - [x-(a+b+c)] = x - \frac{(a+b+c)}{L}x - x + (a+b+c) = -\frac{(a+b+c)}{L}x + (a+b+c)$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial W} = \frac{(a+b+c)}{L}(-x+L)$$

$$\delta_{C4} = \int_{(a+b+c)}^{L}\left(\frac{M_4}{E_3 I_3}\right)\left(\frac{\partial M_4}{\partial Q}\right)dx$$

$$\delta_{D4} = \int_{(a+b+c)}^{L}\left[\frac{R_A(x) - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]}{E_3 I_3}\right]\left[\frac{(a+b+c)}{L}(-x+L)\right]dx$$

$$\delta_{D4} = \frac{(a+b+c)}{E_3 I_3 L}\left\{\int_{(a+b+c)}^{L}[R_A x - Px + Pa - Qx + Qa + Qb - Wx + Wa + Wb + Wc][L - x]\,dx\right\}$$

$$\delta_{D4} = \frac{(a+b+c)}{E_3 I_3 L}\left\{\int_{(a+b+c)}^{L} [(R_A - P - Q - W)xL + (Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc)L - (R_A - P - Q - W)x^2 - (Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc)x]dx\right\}$$

$$\delta_{D4} = \frac{(a+b+c)}{E_3 I_3 L}\left\{(P + Q + W - R_A)\frac{x^3}{3}\Big|_{(a+b+c)}^{L} - (Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc)\frac{x^2}{2}\Big|_{(a+b+c)}^{L} + (R_A - P - Q - W)L\frac{x^2}{2}\Big|_{(a+b+c)}^{L} + (Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc)Lx\Big|_{(a+b+c)}^{L}\right\}$$

$$\delta_{D4} = \frac{(a+b+c)}{E_3 I_3 L}\left\{\frac{1}{3}[P + Q + W - R_A][L^3 - (a+b+c)^3] - \frac{1}{2}[Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc][L^2 - (a+b+c)^2] + \frac{L}{2}[R_A - P - Q - W][L^2 - (a+b+c)^2] + L[Pa + Qa + Qb + Wa + Wb + Wc][L - (a+b+c)]\right\}$$

$$\delta_{D4} = \frac{(a+b+c)}{E_3 I_3 L}\left\{\frac{PL^3}{3} - \frac{P(a+b+c)^3}{3} + \frac{QL^3}{3} - \frac{Q(a+b+c)^3}{3} + \frac{WL^3}{3} - \frac{W(a+b+c)^3}{3} - \frac{R_A L^3}{3} + \frac{R_A(a+b+c)^3}{3} - \frac{PaL^2}{2} + \frac{Pa(a+b+c)^2}{2} - \frac{QaL^2}{2} + \frac{Qa(a+b+c)^2}{2} - \frac{QbL^2}{2} + \frac{Qb(a+b+c)^2}{2} - \frac{WaL^2}{2} + \frac{Wa(a+b+c)^2}{2} - \frac{WbL^2}{2} + \frac{Wb(a+b+c)^2}{2} - \frac{WcL^2}{2} + \frac{Wc(a+b+c)^2}{2} + \frac{R_A L^3}{2} - \frac{R_A L(a+b+c)^2}{2} - \frac{PL^3}{2} + \frac{PL(a+b+c)^2}{2} - \frac{QL^3}{2} + \frac{QL(a+b+c)^2}{2} - \frac{WL^3}{2} + \frac{WL(a+b+c)^2}{2} + PaL^2 - PaL(a+b+c) + QaL^2 - QaL(a+b+c) + QbL^2 - QbL(a+b+c) + WaL^2 - WaL(a+b+c) + WbL^2 - WbL(a+b+c) + WcL^2 - WcL(a+b+c)\right\}$$

$$\delta_{D4} = \frac{(a+b+c)}{E_3 I_3 L}\left\{PL\left[\frac{L^2}{3} - \frac{aL}{2} - \frac{L^2}{2} + aL\right]\right.$$
$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{a(a+b+c)}{2} + \frac{L(a+b+c)}{2} - aL\right]$$
$$+ QL\left[\frac{L^2}{3} - \frac{aL}{2} - \frac{bL}{2} - \frac{L^2}{2} + aL + bL\right]$$
$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{a(a+b+c)}{2} + \frac{b(a+b+c)}{2} + \frac{L(a+b+c)}{2}\right.$$
$$\left. - aL - bL\right] + WL\left[\frac{L^2}{3} - \frac{aL}{2} - \frac{bL}{2} - \frac{cL}{2} - \frac{L^2}{2} + aL + bL + cL\right]$$
$$+ W(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{a(a+b+c)}{2} + \frac{b(a+b+c)}{2} + \frac{c(a+b+c)}{2}\right.$$
$$\left. + \frac{L(a+b+c)}{2} - aL - bL - cL\right] + R_A L^3\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right]$$
$$\left. + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3} - \frac{L}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{D4} = \frac{(a+b+c)}{E_3 I_3 L}\left\{R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3} - \frac{L}{2}\right] + PL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{a}{2}\right]\right.$$
$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{(a+L)(a+b+c)}{2} - aL\right]$$
$$+ QL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b)}{2}\right]$$
$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{(a+b+L)(a+b+c)}{2} - L(a+b)\right]$$
$$\left. + WL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b+c)}{2}\right] + W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6} - \frac{L}{2}\right]\right\} \ldots\ldots\ldots \text{Ec.}(24)$$

Una vez encontradas las deflexiones ocasionadas por cada fuerza, se tiene que la deflexión total en el punto "D" es:

$$\delta_D = \delta_{D1} + \delta_{D2} + \delta_{D3} + \delta_{D4}$$

$$
\begin{aligned}
\delta_D = {} & \frac{L-(a+b+c)}{E_1 I_1 L}\left\{R_A a^3\left[\frac{1}{3}\right]+R_A a^3\left[-\frac{1}{3}\right]+R_A L_1^3\left[\frac{1}{3}\right]+Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right]+PL_1^2\left[-\frac{L_1}{3}+\frac{a}{2}\right]\right\} \\
& +\frac{L-(a+b+c)}{E_2 I_2 L}\left\{R_A(a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right]+R_A L_1^3\left[-\frac{1}{3}\right]+P(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3}+\frac{a}{2}\right]\right. \\
& +PL_1^2\left[\frac{L_1}{3}-\frac{a}{2}\right]+R_A(L_1+L_2)^3\left[\frac{1}{3}\right]+R_A(a+b)^3\left[-\frac{1}{3}\right] \\
& +P(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3}+\frac{a}{2}\right]+P(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{a}{2}\right] \\
& \left.+Q(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3}+\frac{(a+b)}{2}\right]+Q(a+b)^3\left[-\frac{1}{6}\right]\right\} \\
& +\frac{L-(a+b+c)}{E_3 I_3 L}\left\{R_A(a+b+c)^3\left[\frac{1}{3}\right]+R_A(L_1+L_2)^3\left[-\frac{1}{3}\right]\right. \\
& +P(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{a}{2}\right]+P(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3}-\frac{a}{2}\right] \\
& \left.+Q(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{(a+b)}{2}\right]+Q(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3}-\frac{(a+b)}{2}\right]\right\} \\
& +\frac{(a+b+c)}{E_3 I_3 L}\left\{R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right]+R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3}-\frac{L}{2}\right]+PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right]\right. \\
& +P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(a+L)(a+b+c)}{2}-aL\right] \\
& +QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right] \\
& +Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(a+b+L)(a+b+c)}{2}-L(a+b)\right] \\
& \left.+WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right]+W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$\delta_D = \frac{L-(a+b+c)}{E_1 I_1 L}\left\{R_A L_1^3\left[\frac{1}{3}\right] + Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right] + PL_1^2\left[-\frac{L_1}{3}+\frac{a}{2}\right]\right\}$$

$$+\frac{L-(a+b+c)}{E_2 I_2 L}\left\{R_A L_1^3\left[-\frac{1}{3}\right] + R_A(L_1+L_2)^3\left[\frac{1}{3}\right] + PL_1^2\left[\frac{L_1}{3}-\frac{a}{2}\right]\right.$$

$$+P(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3}+\frac{a}{2}\right] + Q(L_1+L_2)^2\left[-\frac{(L_1+L_2)}{3}+\frac{(a+b)}{2}\right]$$

$$\left.+Q(a+b)^3\left[-\frac{1}{6}\right]\right\}$$

$$+\frac{(a+b+c)}{E_3 I_3 L}\left\{\left(\frac{L}{a+b+c}-1\right)\left(R_A(a+b+c)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A(L_1+L_2)^3\left[-\frac{1}{3}\right]\right.\right.$$

$$+P(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{a}{2}\right] + P(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3}-\frac{a}{2}\right]$$

$$\left.+Q(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{(a+b)}{2}\right] + Q(L_1+L_2)^2\left[\frac{(L_1+L_2)}{3}-\frac{(a+b)}{2}\right]\right)$$

$$+R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3}-\frac{L}{2}\right] + PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right]$$

$$+P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(a+L)(a+b+c)}{2}-aL\right]$$

$$+QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right]$$

$$+Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(a+b+L)(a+b+c)}{2}-L(a+b)\right]$$

$$\left.+WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right] + W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\} \ldots\ldots \text{Ec.}(25)$$

Ecuación de Rayleigh-Ritz

Una vez que se han encontrado las deflexiones en los puntos “B”,”C” y “D” ocasionadas por las fuerzas, se puede encontrar la primera velocidad crítica con la ecuación de Rayleigh-Ritz:

$$\boldsymbol{\omega_C} = \sqrt{\frac{\mathbf{g(P\delta_B + Q\delta_C + W\delta_D)}}{\mathbf{P\delta_B^2 + Q\delta_C^2 + W\delta_D^2}}} \ldots\ldots \text{Ec.}(26)$$

Donde:

ω_C = Primera velocida critica del eje $\left({}^{rad}/_{seg}\right)$

g = Aceleración de la gravedad $\left({}^{m}/_{seg^2}\ \text{ó}\ {}^{in}/_{seg^2}\right)$

P = Primera fuerzaa (N ó Lb)

Q = Segunda fuerza (N ó Lb)

W = Tercera fuerza (N ó Lb)

δ_B = Deflexión en el punto B (m ó in)

δ_C = Deflexión en el punto C (m ó in)

δ_D = Deflexión en el punto D (m ó in)

CÁLCULO DEL DIAMETRO CONSTANTE DE UN EJE

En esta segunda parte del proyecto se encontrará el diámetro de un eje que tendrá hasta tres pesos (fuerzas), el diámetro va a ser constante a través de todo el eje, para poder encontrar dicho diámetro se usará la ecuación de Rayleigh-Ritz esto quiere decir que la velocidad crítica ya se tendrá como dato y las deflexiones ocasionas por las fuerzas see encontrarán por el Teorema de Castigliano, a continuación se presenta el eje a analizar:

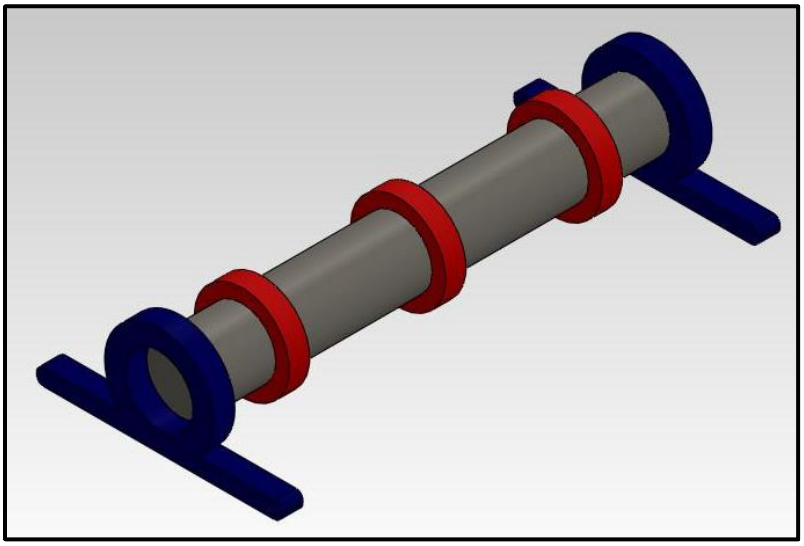


Figura 20. Eje a analizar.

En la siguiente figura se presenta el eje con los datos algebraicos:

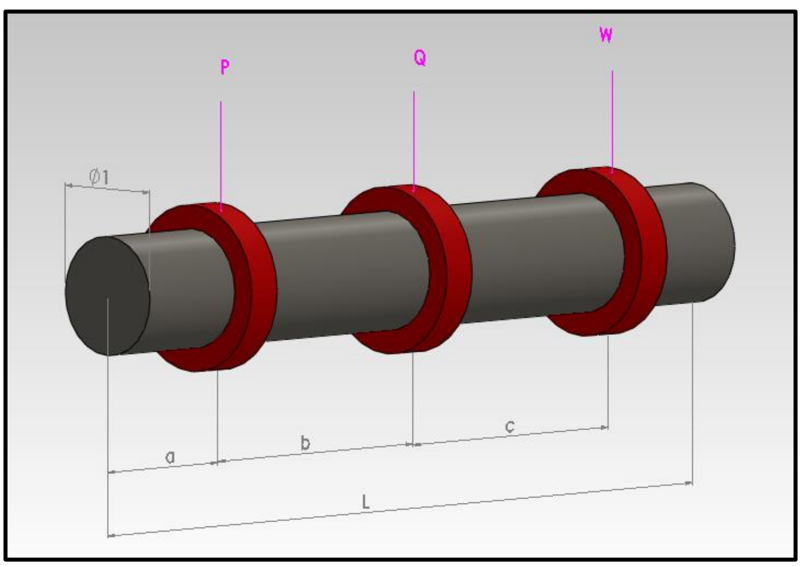


Figura 21. Eje con valores algebraicos

Donde:

P = Primera fuerza (N ó Lb)

Q = Segunda fuerza (N ó Lb)

W = Tercer fuerza (N ó Lb)

a = Distancia del primer apoyo a la primera fuerza (m ó in)

b = Distancia de la primera masa a la segunda fuerza (m ó in)

c = Distancia de la segunda masa a la tercera fuerza (m ó in)

L = Longuitud total del eje (m ó in)

ϕ_1 = Diámetro del eje (m ó in)

Ahora se encontrarán las reacciones en los apoyos que se localizan en los puntos “A” y “E”.

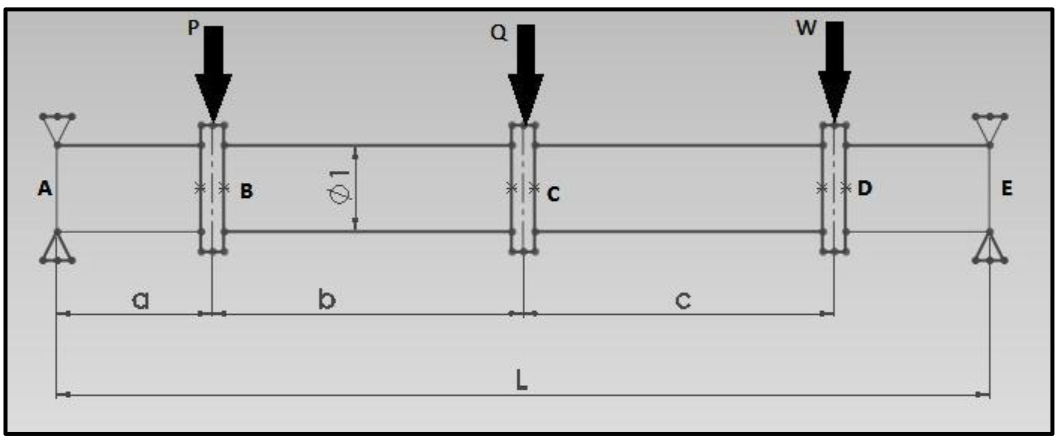


Figura 22. Diagrama de cuerpo libre del eje.

$$\sum M_A = -P(a) - Q(a+b) - W(a+b+c) + R_E L = 0$$

$$\therefore R_E = P\left(\frac{a}{L}\right) + Q\left(\frac{a+b}{L}\right) + W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) \ldots\ldots \text{Ec. } (27)$$

$$\sum M_E = W[L-(a+b+c)] + Q[L-(a+b)] + P[L-a] - R_A L = 0$$

$$R_A L = WL - W(a+b+c) + QL - Q(a+b) + PL - P(a)$$

$$R_A L = (W+Q+P)L - W(a+b+c) - Q(a+b) - P(a)$$

$$R_A = W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right) \ldots\ldots\ldots \text{Ec. } (28)$$

Deflexión en el punto B

Primer corte

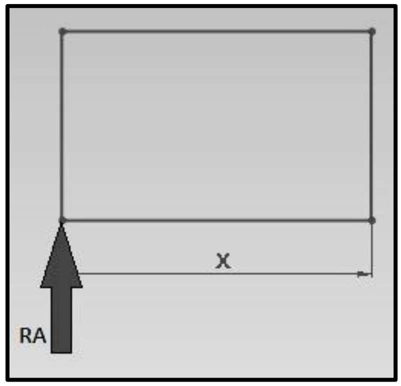


Figura 23. Primer corte

$$M_1 = R_A x = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right] x$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = \left[1 - \frac{a}{L}\right] x$$

$$\delta_{B1} = \int_0^a \left(\frac{M_1}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_1}{\partial P}\right) dx$$

$$\delta_{B1} = \int_0^a \left(\frac{R_A x}{EI}\right)\left(1 - \frac{a}{L}\right) x dx$$

$$\delta_{B1} = \frac{L-a}{EIL} \int_0^a R_A x^2 dx$$

$$\delta_{B1} = \left(\frac{L-a}{EIL}\right) R_A \frac{x^3}{3}\Big|_0^a$$

$$\delta_{B1} = \frac{L-a}{EIL}\left\{\frac{R_A}{3}(a^3 - 0)\right\}$$

$$\delta_{B1} = \frac{L-a}{EIL}\left\{R_A a^3 \left[\frac{1}{3}\right]\right\} \ldots \ldots \ldots \text{Ec.}(29)$$

Segundo corte

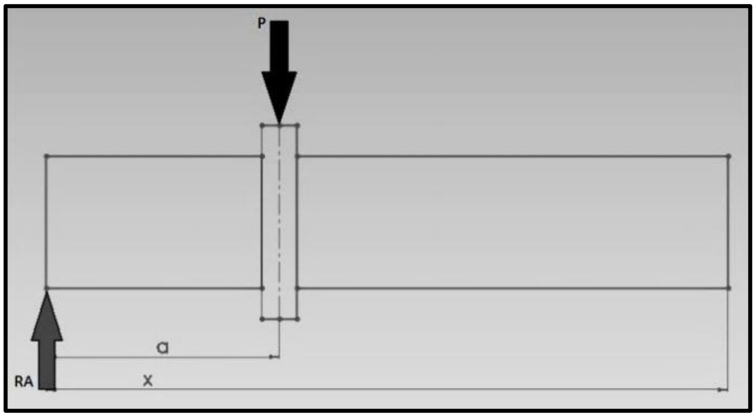


Figura 24. Segundo corte

$$M_2 = R_A x - P(x-a) = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = \left[1 - \frac{a}{L}\right]x - (x-a) = x - \frac{a}{L}x - x + a = a - \frac{a}{L}x = a\left(1 - \frac{x}{L}\right) = a\left(\frac{L-x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = \frac{a}{L}(L-x)$$

$$\delta_{B2} = \int_a^{(a+b)} \left(\frac{M_2}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_2}{\partial P}\right)dx$$

$$\delta_{B2} = \int_a^{(a+b)} \left[\frac{R_A x - P(x-a)}{EI}\right]\left[\frac{a}{L}(L-x)\right]dx$$

$$\delta_{B2} = \frac{a}{EIL}\left\{\int_a^{(a+b)} [R_A x - Px + Pa][L-x]dx\right\}$$

$$\delta_{B2} = \frac{a}{EIL}\left\{\int_a^{(a+b)} [R_A Lx - PLx + PaL - R_A x^2 + Px^2 - Pax]dx\right\}$$

$$\delta_{B2} = \frac{a}{EIL}\left\{\int_a^{(a+b)} [(P - R_A)x^2 + (R_A L - PL - Pa)x + PaL]dx\right\}$$

$$\delta_{B2} = \frac{a}{EIL}\left\{(P - R_A)\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^{(a+b)} + (R_A L - PL - Pa)\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^{(a+b)} + PaLx\Bigg|_a^{(a+b)}\right\}$$

$$\delta_{B2} = \frac{a}{EIL}\left\{\frac{1}{3}[P - R_A][(a+b)^3 - a^3] + \frac{1}{2}[R_A L - PL - Pa][(a+b)^2 - a^2] + [PaL][(a+b) - a]\right\}$$

$$\delta_{B2} = \frac{a}{EIL}\left\{\frac{P(a+b)^3}{3} - \frac{Pa^3}{3} - \frac{R_A(a+b)^3}{3} + \frac{R_A a^3}{3} + \frac{R_A L(a+b)^2}{2} - \frac{R_A La^2}{2} - \frac{PL(a+b)^2}{2} + \frac{PLa^2}{2} - \frac{Pa(a+b)^2}{2} + \frac{Pa^3}{2} + PLa(a+b) - PLa^2\right\}$$

$$\delta_{B2} = \frac{a}{EIL}\left\{R_A(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3} + \frac{L}{2}\right] + R_A a^2\left[\frac{a}{3} - \frac{L}{2}\right] + P(a+b)\left[\frac{(a+b)^2}{3} - \frac{L(a+b)}{2} - \frac{a(a+b)}{2} + La\right] + Pa\left[-\frac{a^2}{3} + \frac{La}{2} + \frac{a^2}{2} - La\right]\right\}$$

$$\delta_{B2} = \frac{a}{EIL}\left\{R_A(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3} + \frac{L}{2}\right] + R_A a^2\left[\frac{a}{3} - \frac{L}{2}\right] + P(a+b)\left[\frac{(a+b)^2}{3} - \frac{(L+a)(a+b)}{2} + La\right] + Pa^2\left[\frac{a}{6} - \frac{L}{2}\right]\right\} \ldots\ldots\ldots \text{Ec. } (30)$$

Tercer corte

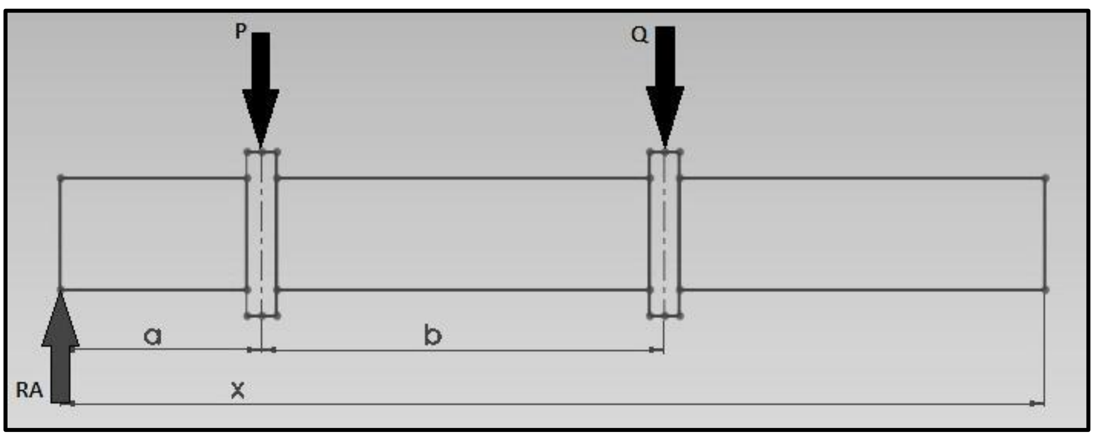


Figura 25. Tercer corte

$$M_3 = R_A x - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$

$$M_3 = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial P} = \left[1 - \frac{a}{L}\right]x - (x-a) = x - \frac{a}{L}x - x + a = a - \frac{a}{L}x = a\left(1 - \frac{x}{L}\right) = a\left(\frac{L-x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial P} = \frac{a}{L}(L-x)$$

$$\delta_{B3}=\int_{(a+b)}^{(a+b+c)}\left(\frac{M_3}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_3}{\partial P}\right)dx$$

$$\delta_{B3}=\int_{(a+b)}^{(a+b+c)}\left[\frac{R_A x-P(x-a)-Q[x-(a+b)]}{EI}\right]\left[\frac{a}{L}(L-x)\right]dx$$

$$\delta_{B3}=\frac{a}{EIL}\left\{\int_{(a+b)}^{(a+b+c)}[R_A x-Px+Pa-Qx+Qa+Qb][L-x]dx\right\}$$

$$\delta_{B3}=\frac{a}{EIL}\left\{\int_{(a+b)}^{(a+b+c)}[R_A Lx-PLx+PaL-QLx+QaL+QbL-R_A x^2+Px^2-Pax+Qx^2-Qax\right.$$
$$\left.-Qbx]dx\right\}$$

$$\delta_{B3}=\frac{a}{EIL}\left\{\int_{(a+b)}^{(a+b+c)}[(P+Q-R_A)x^2+(R_A L-PL-QL-Pa-Qa-Qb)x+PaL+QaL\right.$$
$$\left.+QbL]dx\right\}$$

$$\delta_{B3}=\frac{a}{EIL}\left\{(P+Q-R_A)\frac{x^3}{3}\Big|_{(a+b)}^{(a+b+c)}+(R_A L-PL-QL-Pa-Qa-Qb)\frac{x^2}{2}\Big|_{(a+b)}^{(a+b+c)}\right.$$
$$\left.+(PaL+QaL+QbL)x\Big|_{(a+b)}^{(a+b+c)}\right\}$$

$$\delta_{B3}=\frac{a}{EIL}\left\{\frac{1}{3}[P+Q-R_A][(a+b+c)^3-(a+b)^3]\right.$$
$$+\frac{1}{2}[R_A L-PL-QL-Pa-Qa-Qb][(a+b+c)^2-(a+b)^2]$$
$$\left.+[PaL+QaL+QbL][(a+b+c)-(a+b)]\right\}$$

$$\delta_{B3} = \frac{a}{EIL}\left\{\frac{P(a+b+c)^3}{3} - \frac{P(a+b)^3}{3} + \frac{Q(a+b+c)^3}{3} - \frac{Q(a+b)^3}{3} - \frac{R_A(a+b+c)^3}{3}\right.$$

$$+ \frac{R_A(a+b)^3}{3} + \frac{R_A L(a+b+c)^2}{2} - \frac{R_A L(a+b)^2}{2} - \frac{PL(a+b+c)^2}{2} + \frac{PL(a+b)^2}{2}$$

$$- \frac{QL(a+b+c)^2}{2} + \frac{QL(a+b)^2}{2} - \frac{Pa(a+b+c)^2}{2} + \frac{Pa(a+b)^2}{2}$$

$$- \frac{Qa(a+b+c)^2}{2} + \frac{Qa(a+b)^2}{2} - \frac{Qb(a+b+c)^2}{2} + \frac{Qb(a+b)^2}{2}$$

$$+ PLa(a+b+c) - PLa(a+b) + QLa(a+b+c) - QLa(a+b)$$

$$\left. + QLb(a+b+c) - QLb(a+b)\right\}$$

$$\delta_{B3} = \frac{a}{EIL}\left\{R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3} + \frac{L}{2}\right] + R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3} - \frac{L}{2}\right]\right.$$

$$+ P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3} - \frac{L(a+b+c)}{2} - \frac{a(a+b+c)}{2} + La\right]$$

$$+ P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3} + \frac{L(a+b)}{2} + \frac{a(a+b)}{2} - La\right]$$

$$+ Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3} - \frac{L(a+b+c)}{2} - \frac{a(a+b+c)}{2} - \frac{b(a+b+c)}{2} + La\right.$$

$$\left.\left. + Lb\right] + Q(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3} + \frac{L(a+b)}{2} + \frac{a(a+b)}{2} + \frac{b(a+b)}{2} - La - Lb\right]\right\}$$

$$\delta_{B3} = \frac{a}{EIL}\left\{R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3} + \frac{L}{2}\right] + R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3} - \frac{L}{2}\right]\right.$$

$$+ P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3} - \frac{(L+a)(a+b+c)}{2} + La\right]$$

$$+ P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3} + \frac{(L+a)(a+b)}{2} - La\right]$$

$$+ Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3} - \frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2} + L(a+b)\right]$$

$$\left. + Q(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3} + \frac{L(a+b)}{2} + \frac{(a+b)(a+b)}{2} - L(a+b)\right]\right\}$$

$$\delta_{B3} = \frac{a}{EIL}\left\{R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{L}{2}\right]+R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{L}{2}\right]\right.$$
$$+P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{(L+a)(a+b+c)}{2}+La\right]$$
$$+P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3}+\frac{(L+a)(a+b)}{2}-La\right]$$
$$+Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2}+L(a+b)\right]$$
$$\left.+Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}\ldots\ldots\ldots \text{Ec. }(31)$$

Cuarto corte

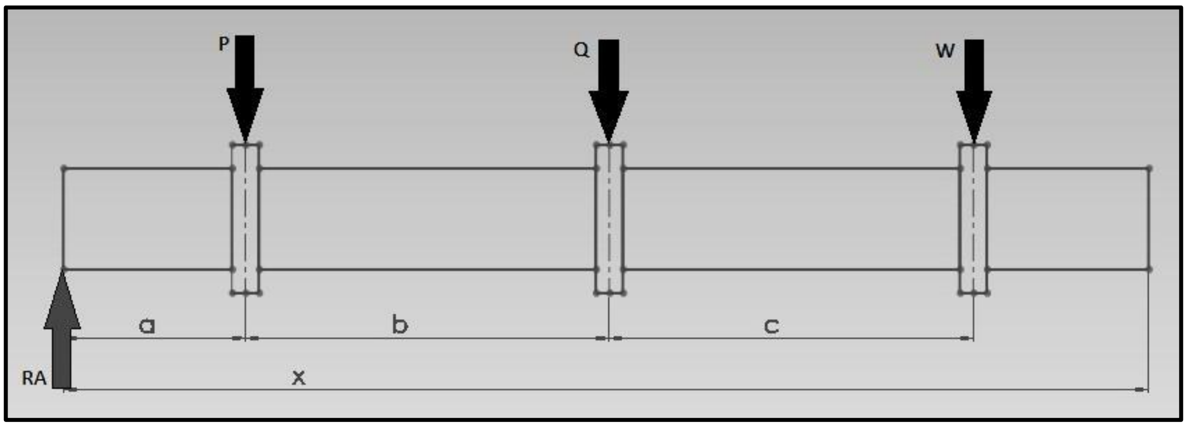


Figura 26.Cuarto corte

$$M_4 = R_A x - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]$$

$$M_4 = \left[W+Q+P-W\left(\frac{a+b+c}{L}\right)-Q\left(\frac{a+b}{L}\right)-P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$
$$-W[x-(a+b+c)]$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial P} = \left[1-\frac{a}{L}\right]x-(x-a) = x-\frac{a}{L}x-x+a = a-\frac{a}{L}x = a\left(1-\frac{x}{L}\right) = a\left(\frac{L-x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial P} = \frac{a}{L}(L-x)$$

$$\delta_{B4} = \int_{(a+b+c)}^{L}\left(\frac{M_4}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_4}{\partial P}\right)dx$$

$$\delta_{B4} = \int_{(a+b+c)}^{L} \left[\frac{R_A x - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]}{EI}\right]\left[\frac{a}{L}(L-x)\right] dx$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{EIL}\left\{\int_{(a+b+c)}^{L} [R_A x - Px + Pa - Qx + Qa + Qb - Wx + Wa + Wb + Wc][L-x]dx\right\}$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{EIL}\left\{\int_{(a+b)}^{L} [R_A Lx - PLx + PaL - QLx + QaL + QbL - WLx + WaL + WbL + WcL - R_A x^2 \right.$$
$$\left. + Px^2 - Pax + Qx^2 - Qax - Qbx + Wx^2 - Wax - Wbx - Wcx]dx\right\}$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{EIL}\left\{\int_{(a+b+c)}^{L} [(P + Q + W - R_A)x^2 \right.$$
$$+ (R_A L - PL - QL - WL - Pa - Qa - Qb - Wa - Wb - Wc)x + PaL + QaL$$
$$\left. + QbL + WaL + WbL + WcL]dx\right\}$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{EIL}\left\{(P + Q + W - R_A)\frac{x^3}{3}\bigg|_{(a+b+c)}^{L} \right.$$
$$+ (R_A L - PL - QL - WL - Pa - Qa - Qb - Wa - Wb - Wc)\frac{x^2}{2}\bigg|_{(a+b+c)}^{L}$$
$$\left. + (PaL + QaL + QbL + WaL + WbL + WcL)x\bigg|_{(a+b+c)}^{L}\right\}$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{EIL}\left\{\frac{1}{3}[P + Q + W - R_A][L^3 - (a+b+c)^3] \right.$$
$$+ \frac{1}{2}[R_A L - PL - QL - WL - Pa - Qa - Qb - Wa - Wb - Wc][L^2$$
$$\left. - (a+b+c)^2] + [PaL + QaL + QbL + WaL + WbL + WcL][L - (a+b+c)]\right\}$$

$$
\begin{aligned}
\delta_{B4} = \frac{a}{EIL}\Bigg\{ & \frac{PL^3}{3} - \frac{P(a+b+c)^3}{3} + \frac{QL^3}{3} - \frac{Q(a+b+c)^3}{3} + \frac{WL^3}{3} - \frac{W(a+b+c)^3}{3} - \frac{R_A L^3}{3} \\
& + \frac{R_A(a+b+c)^3}{3} + \frac{R_A L^3}{2} - \frac{R_A L(a+b+c)^2}{2} - \frac{PL^3}{2} + \frac{PL(a+b+c)^2}{2} - \frac{QL^3}{2} \\
& + \frac{QL(a+b+c)^2}{2} - \frac{WL^3}{2} + \frac{WL(a+b+c)^2}{2} - \frac{PaL^2}{2} + \frac{Pa(a+b+c)^2}{2} - \frac{QaL^2}{2} \\
& + \frac{Qa(a+b+c)^2}{2} - \frac{QbL^2}{2} + \frac{Qb(a+b+c)^2}{2} - \frac{WaL^2}{2} + \frac{Wa(a+b+c)^2}{2} - \frac{WbL^2}{2} \\
& + \frac{Wb(a+b+c)^2}{2} - \frac{WcL^2}{2} + \frac{Wc(a+b+c)^2}{2} + PaL^2 - PLa(a+b+c) + QaL^2 \\
& - QLa(a+b+c) + QbL^2 - QLb(a+b+c) + WaL^2 - WLa(a+b+c) + WbL^2 \\
& - WLb(a+b+c) + WcL^2 - WLc(a+b+c) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_{B4} = \frac{a}{EIL}\Bigg\{ & R_A L^3\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3} - \frac{L}{2}\right] + PL\left[\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2} - \frac{aL}{2} + La\right] \\
& + P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{L(a+b+c)}{2} + \frac{a(a+b+c)}{2} - La\right] \\
& + QL\left[\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2} - \frac{aL}{2} - \frac{bL}{2} + La + Lb\right] \\
& + Q(a+b+c)\Bigg[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{L(a+b+c)}{2} + \frac{a(a+b+c)}{2} + \frac{b(a+b+c)}{2} \\
& - La - Lb\Bigg] + WL\left[\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2} - \frac{aL}{2} - \frac{bL}{2} - \frac{cL}{2} + La + Lb + Lc\right] \\
& + W(a+b+c)\Bigg[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{L(a+b+c)}{2} + \frac{a(a+b+c)}{2} + \frac{b(a+b+c)}{2} \\
& + \frac{c(a+b+c)}{2} - La - Lb - Lc\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{EIL}\Bigg\{R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3} - \frac{L}{2}\right] + PL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{a}{2}\right]$$
$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{(L+a)(a+b+c)}{2} - La\right]$$
$$+ QL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b)}{2}\right]$$
$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2} - L(a+b)\right]$$
$$+ WL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b+c)}{2}\right]$$
$$+ W(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{L(a+b+c)}{2} + \frac{(a+b+c)(a+b+c)}{2}\right.$$
$$\left.- L(a+b+c)\right]\Bigg\}$$

$$\delta_{B4} = \frac{a}{EIL}\Bigg\{R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3} - \frac{L}{2}\right] + PL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{a}{2}\right]$$
$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{(L+a)(a+b+c)}{2} - La\right]$$
$$+ QL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b)}{2}\right]$$
$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2} - L(a+b)\right]$$
$$+ WL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b+c)}{2}\right] + W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6} - \frac{L}{2}\right]\Bigg\} \ldots\ldots\ldots \text{Ec.}(32)$$

Una vez encontradas las deflexiones ocasionadas por cada fuerza, se tiene que la deflexión total en el punto “B” es:

$$\delta_B = \delta_{B1} + \delta_{B2} + \delta_{B3} + \delta_{B4}$$

$$\delta_B = \frac{L-a}{EIL}\left\{R_A a^3\left[\frac{1}{3}\right]\right\}$$

$$+\frac{a}{EIL}\left\{R_A(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3}+\frac{L}{2}\right]+R_A a^2\left[\frac{a}{3}-\frac{L}{2}\right]\right.$$

$$+P(a+b)\left[\frac{(a+b)^2}{3}-\frac{(L+a)(a+b)}{2}+La\right]+Pa^2\left[\frac{a}{6}-\frac{L}{2}\right]$$

$$+R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{L}{2}\right]+R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{L}{2}\right]$$

$$+P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{(L+a)(a+b+c)}{2}+La\right]$$

$$+P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3}+\frac{(L+a)(a+b)}{2}-La\right]$$

$$+Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2}+L(a+b)\right]$$

$$+Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{6}-\frac{L}{2}\right]+R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right]+R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3}-\frac{L}{2}\right]$$

$$+PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right]+P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(L+a)(a+b+c)}{2}-La\right]$$

$$+QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right]$$

$$+Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2}-L(a+b)\right]$$

$$\left.+WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right]+W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_B = \frac{a}{EIL}\left\{R_A a^2\left[\frac{L}{3}-\frac{a}{3}\right]\right\}$$

$$+\frac{a}{EIL}\left\{+R_A a^2\left[\frac{a}{3}-\frac{L}{2}\right]+Pa^2\left[\frac{a}{6}-\frac{L}{2}\right]+Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{6}-\frac{L}{2}\right]+R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right]\right.$$

$$+PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right]+QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right]+WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right]$$

$$\left.+W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_B = \frac{a}{EIL}\left\{+R_A a^2\left[-\frac{L}{6}\right] + Pa^2\left[\frac{a}{6}-\frac{L}{2}\right] + Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{6}-\frac{L}{2}\right] + R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] + PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right]\right.$$
$$+ QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right] + WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right]$$
$$\left.+ W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\} \ldots\ldots\ldots \text{Ec. } (33)$$

Deflexión en el punto C

Primer corte

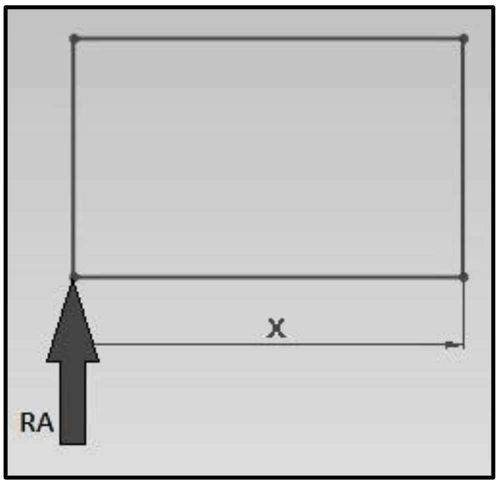


Figura 27. Primer corte

$$M_1 = R_A x = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right] x$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial Q} = \left[1 - \frac{(a+b)}{L}\right] x$$

$$\delta_{C1} = \int_0^a \left(\frac{M_1}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_1}{\partial Q}\right) dx$$

$$\delta_{C1} = \int_0^a \left(\frac{R_A x}{EI}\right)\left(1 - \frac{(a+b)}{L}\right) x dx$$

$$\delta_{C1} = \frac{L-(a+b)}{EIL}\int_0^a R_A x^2 dx$$

$$\delta_{C1} = \left[\frac{L-(a+b)}{EIL}\right] R_A \frac{x^3}{3}\Big|_0^a$$

$$\delta_{C1} = \frac{L-(a+b)}{EIL}\left\{\frac{R_A}{3}(a^3-0)\right\}$$

$$\delta_{C1} = \frac{L-(a+b)}{EIL}\left\{R_A a^3\left[\frac{1}{3}\right]\right\} \ldots\ldots\ldots \text{Ec.}(34)$$

Segundo corte

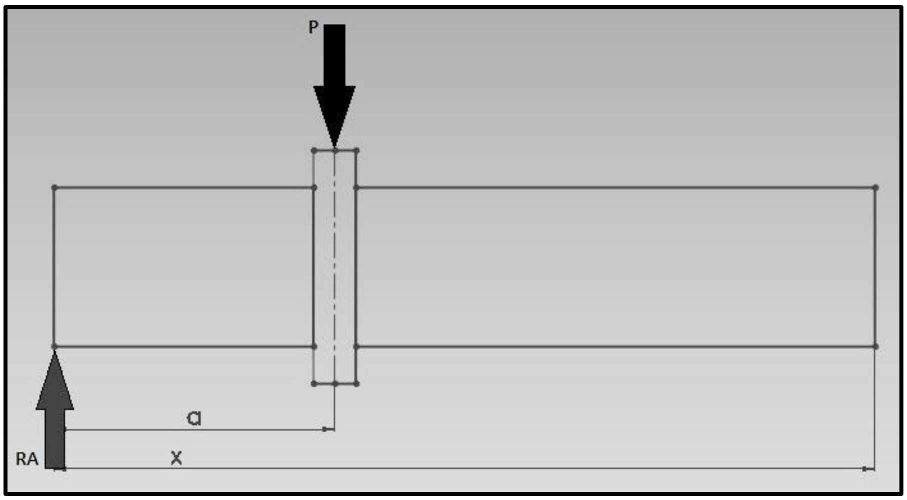


Figura 28. Segundo corte

$$M_2 = R_A x - P(x-a) = \left[W+Q+P-W\left(\frac{a+b+c}{L}\right)-Q\left(\frac{a+b}{L}\right)-P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial Q} = \left[1-\frac{(a+b)}{L}\right]x$$

$$\delta_{B2} = \int_a^{(a+b)}\left(\frac{M_2}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_2}{\partial Q}\right)dx$$

$$\delta_{B2} = \int_a^{(a+b)}\left[\frac{R_A x - P(x-a)}{EI}\right]\left[1-\frac{(a+b)}{L}\right]xdx$$

$$\delta_{B2} = \frac{L-(a+b)}{EIL}\left\{\int_a^{(a+b)}[R_A x - Px + Pa]xdx\right\}$$

$$\delta_{B2} = \frac{L-(a+b)}{EIL}\left\{\int_a^{(a+b)}[R_A x^2 - Px^2 + Pax]dx\right\}$$

$$\delta_{B2} = \frac{L-(a+b)}{EIL}\left\{\int_a^{(a+b)}[(R_A - P)x^2 + Pax]dx\right\}$$

$$\delta_{B2} = \frac{L-(a+b)}{EIL}\left\{(R_A - P)\frac{x^3}{3}\Bigg|_{a}^{(a+b)} + Pa\frac{x^2}{2}\Bigg|_{a}^{(a+b)}\right\}$$

$$\delta_{B2} = \frac{L-(a+b)}{EIL}\left\{\frac{1}{3}[R_A - P][(a+b)^3 - a^3] + \frac{1}{2}[Pa][(a+b)^2 - a^2]\right\}$$

$$\delta_{B2} = \frac{L-(a+b)}{EIL}\left\{\frac{R_A(a+b)^3}{3} - \frac{R_A a^3}{3} - \frac{P(a+b)^3}{3} + \frac{Pa^3}{3} + \frac{Pa(a+b)^2}{2} - \frac{Pa^3}{2}\right\}$$

$$\delta_{B2} = \frac{L-(a+b)}{EIL}\left\{R_A(a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A a^3\left[-\frac{1}{3}\right] + P(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3} + \frac{a}{2}\right]\right.$$
$$\left. + Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right]\right\} \ldots\ldots\ldots \text{Ec.}(35)$$

Tercer corte

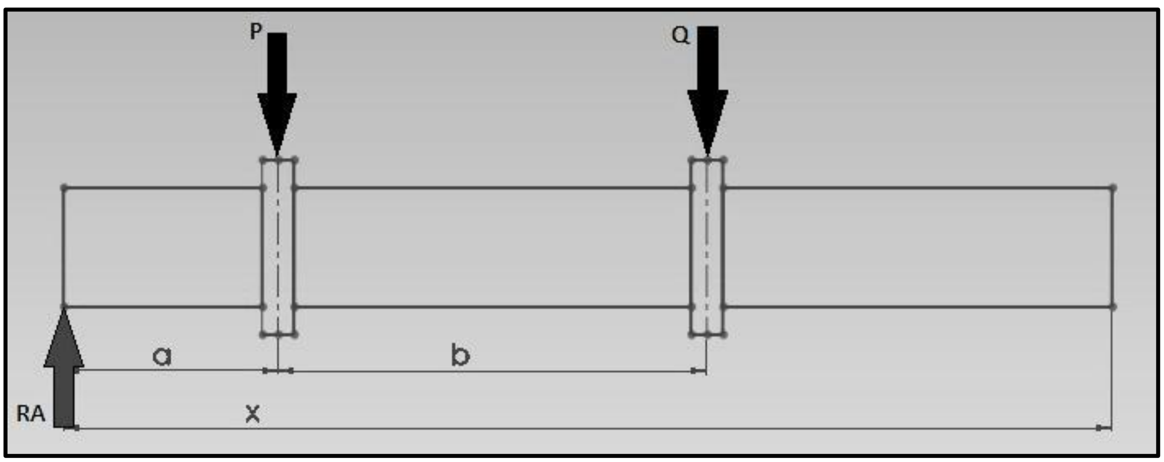


Figura 29. Tercer corte

$$M_3 = R_A x - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$

$$M_3 = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial Q} = \left[1 - \frac{(a+b)}{L}\right]x - [x-(a+b)] = x - \frac{(a+b)}{L}x - x + (a+b) = (a+b) - \frac{(a+b)}{L}x$$
$$= (a+b)\left(1 - \frac{x}{L}\right) = (a+b)\left(\frac{L-x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial Q} = \left[\frac{(a+b)}{L}\right][L-x]$$

$$\delta_{C3} = \int_{(a+b)}^{(a+b+c)} \left(\frac{M_3}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_3}{\partial Q}\right) dx$$

$$\delta_{C3} = \int_{(a+b)}^{(a+b+c)} \left[\frac{R_A x - P(x-a) - Q[x-(a+b)]}{EI}\right]\left[\frac{(a+b)}{L}\right][L-x]dx$$

$$\delta_{C3} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{\int_{(a+b)}^{(a+b+c)} [R_A x - Px + Pa - Qx + Qa + Qb][L-x]dx\right\}$$

$$\delta_{C3} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{\int_{(a+b)}^{(a+b+c)} [R_A Lx - PLx + PaL - QLx + QaL + QbL - R_A x^2 + Px^2 - Pax + Qx^2 - Qax - Qbx]dx\right\}$$

$$\delta_{C3} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{\int_{(a+b)}^{(a+b+c)} [(P+Q-R_A)x^2 + (R_A L - PL - QL - Pa - Qa - Qb)x + PaL + QaL + QbL]dx\right\}$$

$$\delta_{C3} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{(P+Q-R_A)\frac{x^3}{3}\Bigg|_{(a+b)}^{(a+b+c)} + (R_A L - PL - QL - Pa - Qa - Qb)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{(a+b)}^{(a+b+c)} + (PaL + QaL + QbL)x\Bigg|_{(a+b)}^{(a+b+c)}\right\}$$

$$\delta_{C3} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{\frac{1}{3}[P+Q-R_A][(a+b+c)^3 - (a+b)^3] + \frac{1}{2}[R_A L - PL - QL - Pa - Qa - Qb][(a+b+c)^2 - (a+b)^2] + [PaL + QaL + QbL][(a+b+c) - (a+b)]\right\}$$

$$\delta_{C3}=\frac{(a+b)}{EIL}\left\{\frac{P(a+b+c)^3}{3}-\frac{P(a+b)^3}{3}+\frac{Q(a+b+c)^3}{3}-\frac{Q(a+b)^3}{3}-\frac{R_A(a+b+c)^3}{3}\right.$$
$$+\frac{R_A(a+b)^3}{3}+\frac{R_AL(a+b+c)^2}{2}-\frac{R_AL(a+b)^2}{2}-\frac{PL(a+b+c)^2}{2}+\frac{PL(a+b)^2}{2}$$
$$-\frac{QL(a+b+c)^2}{2}+\frac{QL(a+b)^2}{2}-\frac{Pa(a+b+c)^2}{2}+\frac{Pa(a+b)^2}{2}$$
$$-\frac{Qa(a+b+c)^2}{2}+\frac{Qa(a+b)^2}{2}-\frac{Qb(a+b+c)^2}{2}+\frac{Qb(a+b)^2}{2}$$
$$+PLa(a+b+c)-PLa(a+b)+QLa(a+b+c)-QLa(a+b)$$
$$\left.+QLb(a+b+c)-QLb(a+b)\right\}$$

$$\delta_{C3}=\frac{(a+b)}{EIL}\left\{R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{L}{2}\right]+R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{L}{2}\right]\right.$$
$$+P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{L(a+b+c)}{2}-\frac{a(a+b+c)}{2}+La\right]$$
$$+P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3}+\frac{L(a+b)}{2}+\frac{a(a+b)}{2}-La\right]$$
$$+Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{L(a+b+c)}{2}-\frac{a(a+b+c)}{2}-\frac{b(a+b+c)}{2}+La\right.$$
$$\left.\left.+Lb\right]+Q(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3}+\frac{L(a+b)}{2}+\frac{a(a+b)}{2}+\frac{b(a+b)}{2}-La-Lb\right]\right\}$$

$$\delta_{C3}=\frac{(a+b)}{EIL}\left\{R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{L}{2}\right]+R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{L}{2}\right]\right.$$
$$+P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{(L+a)(a+b+c)}{2}+La\right]$$
$$+P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3}+\frac{(L+a)(a+b)}{2}-La\right]$$
$$+Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2}+L(a+b)\right]$$
$$\left.+Q(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3}+\frac{L(a+b)}{2}+\frac{(a+b)(a+b)}{2}-L(a+b)\right]\right\}$$

$$\delta_{C3} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{L}{2}\right]+R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{L}{2}\right]\right.$$
$$+P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{(L+a)(a+b+c)}{2}+La\right]$$
$$+P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3}+\frac{(L+a)(a+b)}{2}-La\right]$$
$$+Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2}+L(a+b)\right]$$
$$\left.+Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}\ldots\ldots\ldots \text{Ec. } (36)$$

Cuarto corte

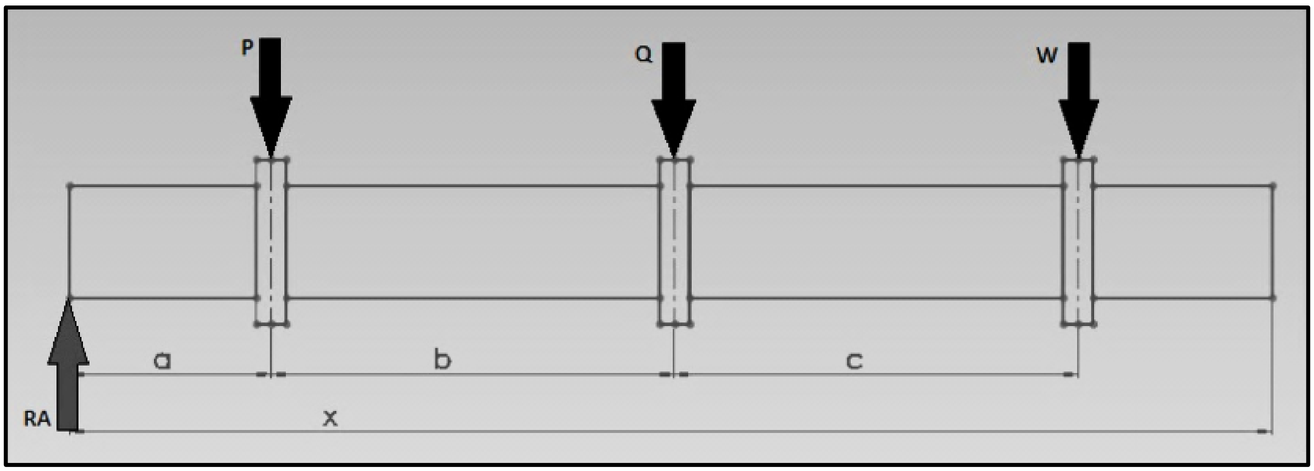


Figura 30. Cuarto corte

$$M_4 = R_A x - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]$$

$$M_4 = \left[W+Q+P-W\left(\frac{a+b+c}{L}\right)-Q\left(\frac{a+b}{L}\right)-P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$
$$-W[x-(a+b+c)]$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial Q} = \left[1-\frac{(a+b)}{L}\right]x - [x-(a+b)] = x - \frac{(a+b)}{L}x - x + (a+b) = (a+b) - \frac{(a+b)}{L}x$$
$$= (a+b)\left(1-\frac{x}{L}\right) = (a+b)\left(\frac{L-x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial Q} = \left[\frac{(a+b)}{L}\right][L-x]$$

$$\delta_{C4} = \int_{(a+b+c)}^{L} \left(\frac{M_4}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_4}{\partial Q}\right) dx$$

$$\delta_{C4} = \int_{(a+b+c)}^{L} \left[\frac{R_A x - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]}{EI}\right]\left[\frac{(a+b)}{L}\right][L-x]dx$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{\int_{(a+b+c)}^{L} [R_A x - Px + Pa - Qx + Qa + Qb - Wx + Wa + Wb + Wc][L-x]dx\right\}$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{\int_{(a+b)}^{L} [R_A Lx - PLx + PaL - QLx + QaL + QbL - WLx + WaL + WbL + WcL \right.$$
$$\left. - R_A x^2 + Px^2 - Pax + Qx^2 - Qax - Qbx + Wx^2 - Wax - Wbx - Wcx]dx\right\}$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{\int_{(a+b+c)}^{L} [(P+Q+W-R_A)x^2 \right.$$
$$+ (R_A L - PL - QL - WL - Pa - Qa - Qb - Wa - Wb - Wc)x + PaL + QaL$$
$$\left. + QbL + WaL + WbL + WcL]dx\right\}$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{(P+Q+W-R_A)\frac{x^3}{3}\bigg|_{(a+b+c)}^{L} \right.$$
$$+ (R_A L - PL - QL - WL - Pa - Qa - Qb - Wa - Wb - Wc)\frac{x^2}{2}\bigg|_{(a+b+c)}^{L}$$
$$\left. + (PaL + QaL + QbL + WaL + WbL + WcL)x\bigg|_{(a+b+c)}^{L}\right\}$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{\frac{1}{3}[P+Q+W-R_A][L^3-(a+b+c)^3] \right.$$
$$+ \frac{1}{2}[R_A L - PL - QL - WL - Pa - Qa - Qb - Wa - Wb - Wc][L^2$$
$$\left. - (a+b+c)^2] + [PaL + QaL + QbL + WaL + WbL + WcL][L-(a+b+c)]\right\}$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{\frac{PL^3}{3} - \frac{P(a+b+c)^3}{3} + \frac{QL^3}{3} - \frac{Q(a+b+c)^3}{3} + \frac{WL^3}{3} - \frac{W(a+b+c)^3}{3} - \frac{R_A L^3}{3}\right.$$
$$+ \frac{R_A(a+b+c)^3}{3} + \frac{R_A L^3}{2} - \frac{R_A L(a+b+c)^2}{2} - \frac{PL^3}{2} + \frac{PL(a+b+c)^2}{2} - \frac{QL^3}{2}$$
$$+ \frac{QL(a+b+c)^2}{2} - \frac{WL^3}{2} + \frac{WL(a+b+c)^2}{2} - \frac{PaL^2}{2} + \frac{Pa(a+b+c)^2}{2} - \frac{QaL^2}{2}$$
$$+ \frac{Qa(a+b+c)^2}{2} - \frac{QbL^2}{2} + \frac{Qb(a+b+c)^2}{2} - \frac{WaL^2}{2} + \frac{Wa(a+b+c)^2}{2} - \frac{WbL^2}{2}$$
$$+ \frac{Wb(a+b+c)^2}{2} - \frac{WcL^2}{2} + \frac{Wc(a+b+c)^2}{2} + PaL^2 - PLa(a+b+c) + QaL^2$$
$$- QLa(a+b+c) + QbL^2 - QLb(a+b+c) + WaL^2 - WLa(a+b+c) + WbL^2$$
$$\left. - WLb(a+b+c) + WcL^2 - WLc(a+b+c)\right\}$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{R_A L^3\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3} - \frac{L}{2}\right] + PL\left[\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2} - \frac{aL}{2} + La\right]\right.$$
$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{L(a+b+c)}{2} + \frac{a(a+b+c)}{2} - La\right]$$
$$+ QL\left[\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2} - \frac{aL}{2} - \frac{bL}{2} + La + Lb\right]$$
$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{L(a+b+c)}{2} + \frac{a(a+b+c)}{2} + \frac{b(a+b+c)}{2}\right.$$
$$\left. - La - Lb\right] + WL\left[\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2} - \frac{aL}{2} - \frac{bL}{2} - \frac{cL}{2} + La + Lb + Lc\right]$$
$$+ W(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{L(a+b+c)}{2} + \frac{a(a+b+c)}{2} + \frac{b(a+b+c)}{2}\right.$$
$$\left.\left. + \frac{c(a+b+c)}{2} - La - Lb - Lc\right]\right\}$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3} - \frac{L}{2}\right] + PL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{a}{2}\right]\right.$$

$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{(L+a)(a+b+c)}{2} - La\right]$$

$$+ QL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b)}{2}\right]$$

$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2} - L(a+b)\right]$$

$$+ WL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b+c)}{2}\right]$$

$$+ W(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{L(a+b+c)}{2} + \frac{(a+b+c)(a+b+c)}{2}\right.$$

$$\left.\left. - L(a+b+c)\right]\right\}$$

$$\delta_{C4} = \frac{(a+b)}{EIL}\left\{R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3} - \frac{L}{2}\right] + PL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{a}{2}\right]\right.$$

$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{(L+a)(a+b+c)}{2} - La\right]$$

$$+ QL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b)}{2}\right]$$

$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2} - L(a+b)\right]$$

$$\left. + WL^2\left[-\frac{L}{6} + \frac{(a+b+c)}{2}\right] + W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6} - \frac{L}{2}\right]\right\} \ldots\ldots\ldots \text{Ec.}(37)$$

Una vez encontradas las deflexiones ocasionadas por cada fuerza, se tiene que la deflexión total en el punto “C” es:

$$\delta_C = \delta_{C1} + \delta_{C2} + \delta_{C3} + \delta_{C4}$$

$$\delta_C = \frac{L-(a+b)}{EIL}\left\{R_A a^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A(a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A a^3\left[-\frac{1}{3}\right] + P(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3}+\frac{a}{2}\right]\right.$$

$$\left. + Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right]\right\}$$

$$+\frac{(a+b)}{EIL}\left\{R_A(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{L}{2}\right] + R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{L}{2}\right]\right.$$

$$+ P(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{(L+a)(a+b+c)}{2}+La\right]$$

$$+ P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3}+\frac{(L+a)(a+b)}{2}-La\right]$$

$$+ Q(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2}+L(a+b)\right]$$

$$+ Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{6}-\frac{L}{2}\right] + R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3}-\frac{L}{2}\right]$$

$$+ PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right] + P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(L+a)(a+b+c)}{2}-La\right]$$

$$+ QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right]$$

$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2}-L(a+b)\right]$$

$$\left. + WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right] + W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_C = \frac{L-(a+b)}{EIL}\left\{R_A(a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right] + P(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3}+\frac{a}{2}\right] + Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right]\right\}$$

$$+\frac{(a+b)}{EIL}\left\{R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{L}{2}\right]\right.$$

$$+ P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3}+\frac{(L+a)(a+b)}{2}-La\right] + Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{6}-\frac{L}{2}\right]$$

$$+ R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] + PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right] + QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right] + WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right]$$

$$\left. + W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\} \ldots\ldots\ldots \text{Ec. (38)}$$

Deflexión en el punto D

Primer corte

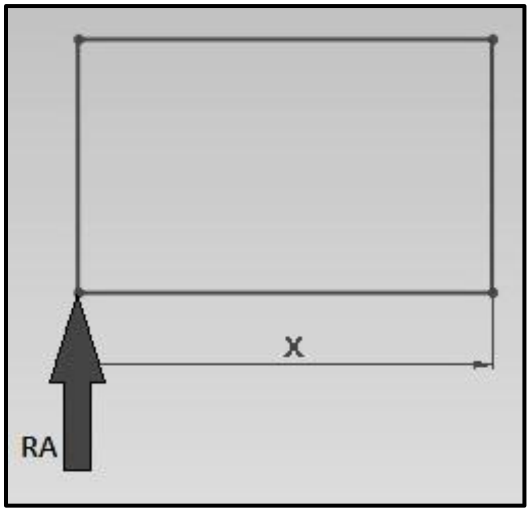


Figura 31. Primer corte

$$M_1 = R_A x = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right] x$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial W} = \left[1 - \frac{(a+b+c)}{L}\right] x$$

$$\delta_{D1} = \int_0^a \left(\frac{M_1}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_1}{\partial W}\right) dx$$

$$\delta_{D1} = \int_0^a \left(\frac{R_A x}{EI}\right)\left[1 - \frac{(a+b+c)}{L}\right] x dx$$

$$\delta_{D1} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{\int_0^a R_A x^2 dx\right\}$$

$$\delta_{D1} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{R_A \frac{x^3}{3}\Big|_0^a\right\}$$

$$\delta_{D1} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{\frac{R_A}{3}(a^3 - 0)\right\}$$

$$\delta_{D1} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{R_A a^3 \left[\frac{1}{3}\right]\right\} \dots\dots\dots Ec. (39)$$

Segundo corte

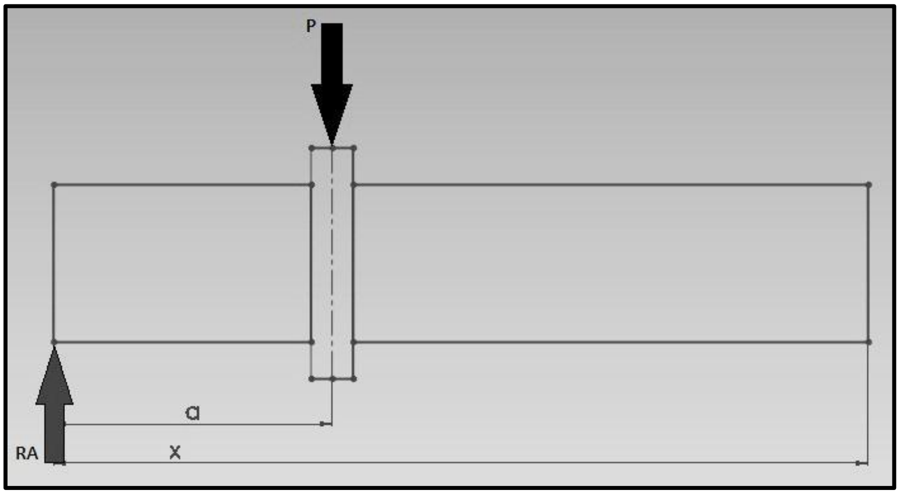


Figura 32. Segundo corte

$$M_2 = R_A x - P(x-a) = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial W} = \left[1 - \frac{(a+b+c)}{L}\right]x$$

$$\delta_{D2} = \int_a^{(a+b)} \left(\frac{M_2}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_2}{\partial W}\right) dx$$

$$\delta_{D2} = \int_a^{(a+b)} \left[\frac{R_A x - P(x-a)}{EI}\right]\left[1 - \frac{(a+b+c)}{L}\right] x dx$$

$$\delta_{D2} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{\int_a^{(a+b)} [R_A x - Px + Pa] x dx\right\}$$

$$\delta_{D2} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{\int_a^{(a+b)} [R_A x^2 - Px^2 + Pax] dx\right\}$$

$$\delta_{D2} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{\int_a^{(a+b)} [(R_A - P)x^2 + Pax] dx\right\}$$

$$\delta_{D2} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{(R_A - P)\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^{(a+b)} + Pa\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^{(a+b)}\right\}$$

$$\delta_{D2} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{\frac{1}{3}[R_A - P][(a+b)^3 - a^3] + \frac{1}{2}Pa[(a+b)^2 - a^2]\right\}$$

$$\delta_{D2} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{\frac{R_A(a+b)^3}{3} - \frac{R_A a^3}{3} - \frac{P(a+b)^3}{3} + \frac{Pa^3}{3} + \frac{Pa(a+b)^2}{2} - \frac{Pa^3}{2}\right\}$$

$$\delta_{D2} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{R_A(a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A a^3\left[-\frac{1}{3}\right] + P(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3} + \frac{a}{2}\right] + Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right]\right\} \ldots\ldots\ldots Ec.(40)$$

Tercer corte

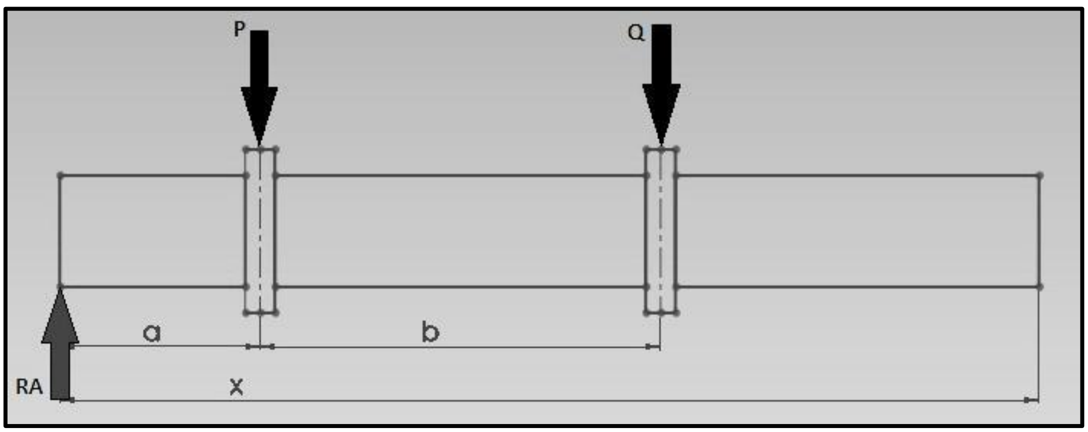


Figura 33. Tercer corte

$$M_3 = R_A x - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$

$$M_3 == \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a) - Q[x-(a+b)]$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial W} = \left[1 - \frac{(a+b+c)}{L}\right]x$$

$$\delta_{D3} = \int_{(a+b)}^{(a+b+c)} \left(\frac{M_3}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_3}{\partial W}\right)dx$$

$$\delta_{D3} = \int_{(a+b)}^{(a+b+c)} \left[\frac{R_A x - P(x-a) - Q[x-(a+b)]}{EI}\right]\left[1 - \frac{(a+b+c)}{L}\right]xdx$$

$$\delta_{D3} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{\int_{(a+b)}^{(a+b+c)} [R_A x - Px + Pa - Qx + Qa + Qb]xdx\right\}$$

$$\delta_{D3} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{\int_{(a+b)}^{(a+b+c)} [R_A x^2 - Px^2 + Pax - Qx^2 + Qax + Qbx]dx\right\}$$

$$\delta_{D3} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{\int_{(a+b)}^{(a+b+c)} [(R_A - P - Q)x^2 + (Pa + Qa + Qb)x]dx\right\}$$

$$\delta_{D3} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{(R_A - P - Q)\frac{x^3}{3}\Bigg|_{(a+b)}^{(a+b+c)} + (Pa + Qa + Qb)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{(a+b)}^{(a+b+c)}\right\}$$

$$\delta_{D3} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{\frac{1}{3}[R_A - P - Q][(a+b+c)^3 - (a+b)^3] + \frac{1}{2}(Pa + Qa + Qb)[(a+b+c)^2 - (a+b)^2]\right\}$$

$$\delta_{D3} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{\frac{R_A(a+b+c)^3}{3} - \frac{R_A(a+b)^3}{3} - \frac{P(a+b+c)^3}{3} + \frac{P(a+b)^3}{3} - \frac{Q(a+b+c)^3}{3} + \frac{Q(a+b)^3}{3} + \frac{Pa(a+b+c)^2}{2} - \frac{Pa(a+b)^2}{2} + \frac{Qa(a+b+c)^2}{2} - \frac{Qa(a+b)^2}{2} + \frac{Qb(a+b+c)^2}{2} - \frac{Qb(a+b)^2}{2}\right\}$$

$$\delta_{D3} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{R_A(a+b+c)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A(a+b)^3\left[-\frac{1}{3}\right] + P(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3} + \frac{a}{2}\right] + P(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3} - \frac{a}{2}\right] + Q(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right] + Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{D3} = \frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{R_A(a+b+c)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A(a+b)^3\left[-\frac{1}{3}\right] + P(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3} + \frac{a}{2}\right] + P(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3} - \frac{a}{2}\right] + Q(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3} + \frac{(a+b)}{2}\right] + Q(a+b)^3\left[-\frac{1}{6}\right]\right\} \ldots\ldots\ldots \text{Ec. } (41)$$

Cuarto corte

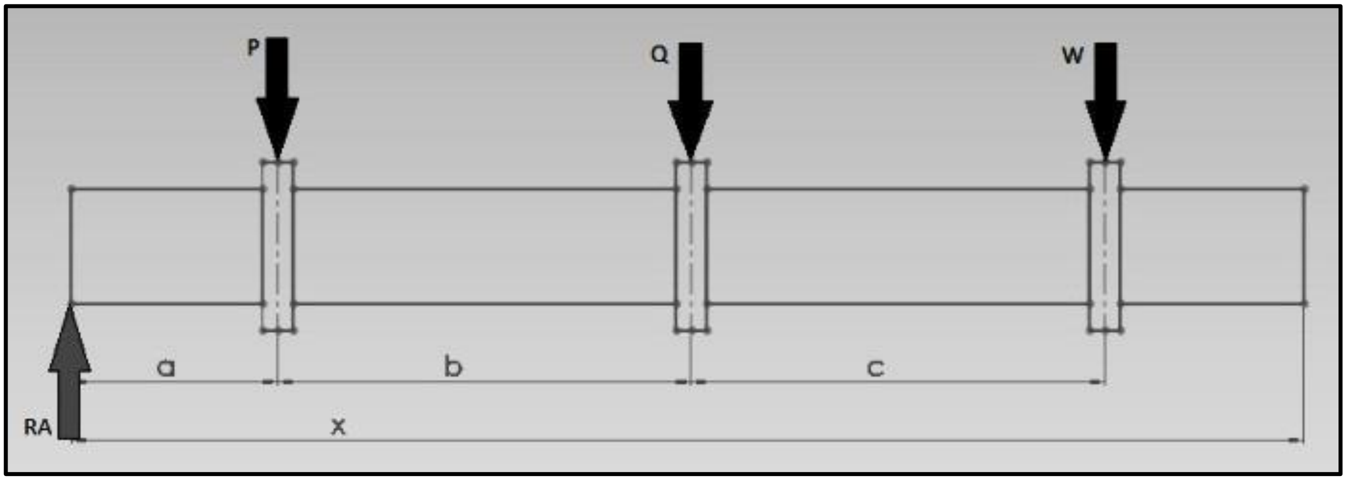


Figura 34. Cuarto corte

$$M_4 = R_A x - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]$$

$$M_4 = \left[W + Q + P - W\left(\frac{a+b+c}{L}\right) - Q\left(\frac{a+b}{L}\right) - P\left(\frac{a}{L}\right)\right]x - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial W} = \left[1 - \frac{(a+b+c)}{L}\right]x - [x-(a+b+c)] = x - \frac{(a+b+c)}{L}x - x + (a+b+c) = -\frac{(a+b+c)}{L}x + (a+b+c) = (a+b+c)\left[1 - \frac{x}{L}\right]$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial W} = \left[\frac{(a+b+c)}{L}\right][L-x]$$

$$\delta_{D4} = \int_{(a+b+c)}^{L} \left(\frac{M_4}{EI}\right)\left(\frac{\partial M_4}{\partial W}\right)dx$$

$$\delta_{D4} = \int_{(a+b+c)}^{L} \left[\frac{R_A x - P(x-a) - Q[x-(a+b)] - W[x-(a+b+c)]}{EI}\right]\left[\frac{(a+b+c)}{L}\right][L-x]dx$$

$$\delta_{D4} = \frac{(a+b+c)}{EIL}\left\{\int_{(a+b+c)}^{L} [R_A x - Px + Pa - Qx + Qa + Qb - Wx + Wa + Wb + Wc][L - x]dx\right\}$$

$$\delta_{D4}=\frac{(a+b+c)}{EIL}\left\{\int_{(a+b+c)}^{L}[R_ALx-PLx+PaL-QLx+QaL+QbL-WLx+WaL+WbL\right.$$
$$+WcL-R_Ax^2+Px^2-Pax+Qx^2-Qax-Qbx+Wx^2-Wax-Wbx$$
$$\left.-Wcx]dx\right\}$$

$$\delta_{D4}=\frac{(a+b+c)}{EIL}\left\{\int_{(a+b+c)}^{L}[(P+Q+W-R_A)x^2\right.$$
$$+(R_AL-PL-QL-WL-Pa-Qa-Qb-Wa-Wb-Wc)x+PaL+QaL$$
$$\left.+QbL+WaL+WbL+WcL]dx\right\}$$

$$\delta_{D4}=\frac{(a+b+c)}{EIL}\left\{(P+Q+W-R_A)\frac{x^3}{3}\Big|_{(a+b+c)}^{L}\right.$$
$$+(R_AL-PL-QL-WL-Pa-Qa-Qb-Wa-Wb-Wc)\frac{x^2}{2}\Big|_{(a+b+c)}^{L}$$
$$\left.+(PaL+QaL+QbL+WaL+WbL+WcL)x\Big|_{(a+b+c)}^{L}\right\}$$

$$\delta_{D4}=\frac{(a+b+c)}{EIL}\left\{\frac{1}{3}[P+Q+W-R_A][L^3-(a+b+c)^3]\right.$$
$$+\frac{1}{2}[R_AL-PL-QL-WL-Pa-Qa-Qb-Wa-Wb-Wc][L^2$$
$$\left.-(a+b+c)^2]+[PaL+QaL+QbL+WaL+WbL+WcL][L-(a+b+c)]\right\}$$

$$\delta_{D4}=\frac{(a+b+c)}{EIL}\left\{\frac{PL^3}{3}-\frac{P(a+b+c)^3}{3}+\frac{QL^3}{3}-\frac{Q(a+b+c)^3}{3}+\frac{WL^3}{3}-\frac{W(a+b+c)^3}{3}-\frac{R_AL^3}{3}\right.$$
$$+\frac{R_A(a+b+c)^3}{3}+\frac{R_AL^3}{2}-\frac{R_AL(a+b+c)^2}{2}-\frac{PL^3}{2}+\frac{PL(a+b+c)^2}{2}-\frac{QL^3}{2}$$
$$+\frac{QL(a+b+c)^2}{2}-\frac{WL^3}{2}+\frac{WL(a+b+c)^2}{2}-\frac{PaL^2}{2}+\frac{Pa(a+b+c)^2}{2}-\frac{QaL^2}{2}$$
$$+\frac{Qa(a+b+c)^2}{2}-\frac{QbL^2}{2}+\frac{Qb(a+b+c)^2}{2}-\frac{WaL^2}{2}+\frac{Wa(a+b+c)^2}{2}-\frac{WbL^2}{2}$$
$$+\frac{Wb(a+b+c)^2}{2}-\frac{WcL^2}{2}+\frac{Wc(a+b+c)^2}{2}+PaL^2-PLa(a+b+c)+QaL^2$$
$$-QLa(a+b+c)+QbL^2-QLb(a+b+c)+WaL^2-WLa(a+b+c)+WbL^2$$
$$\left.-WLb(a+b+c)+WcL^2-WLc(a+b+c)\right\}$$

$$\delta_{D4} = \frac{(a+b+c)}{EIL}\left\{R_A L^3\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3}-\frac{L}{2}\right] + PL\left[\frac{L^2}{3}-\frac{L^2}{2}-\frac{aL}{2}+La\right]\right.$$
$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{L(a+b+c)}{2}+\frac{a(a+b+c)}{2}-La\right]$$
$$+ QL\left[\frac{L^2}{3}-\frac{L^2}{2}-\frac{aL}{2}-\frac{bL}{2}+La+Lb\right]$$
$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{L(a+b+c)}{2}+\frac{a(a+b+c)}{2}+\frac{b(a+b+c)}{2}\right.$$
$$\left.- La - Lb\right] + WL\left[\frac{L^2}{3}-\frac{L^2}{2}-\frac{aL}{2}-\frac{bL}{2}-\frac{cL}{2}+La+Lb+Lc\right]$$
$$+ W(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{L(a+b+c)}{2}+\frac{a(a+b+c)}{2}+\frac{b(a+b+c)}{2}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{c(a+b+c)}{2} - La - Lb - Lc\right]\right\}$$

$$\delta_{D4} = \frac{(a+b+c)}{EIL}\left\{R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3}-\frac{L}{2}\right] + PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right]\right.$$
$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(L+a)(a+b+c)}{2}-La\right]$$
$$+ QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right]$$
$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2}-L(a+b)\right]$$
$$+ WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right]$$
$$+ W(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{L(a+b+c)}{2}+\frac{(a+b+c)(a+b+c)}{2}\right.$$
$$\left.\left.- L(a+b+c)\right]\right\}$$

$$\delta_{D4}=\frac{(a+b+c)}{EIL}\left\{R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right]+R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3}-\frac{L}{2}\right]+PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right]\right.$$
$$+P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(L+a)(a+b+c)}{2}-La\right]$$
$$+QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right]$$
$$+Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2}-L(a+b)\right]$$
$$\left.+WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right]+W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}\ldots\ldots\ldots \text{Ec.}(42)$$

Una vez encontradas las deflexiones ocasionadas por cada fuerza, se tiene que la deflexión total en el punto “D” es:

$$\delta_D=\delta_{D1}+\delta_{D2}+\delta_{D3}+\delta_{D4}$$

$$\delta_{D=}\frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{R_A a^3\left[\frac{1}{3}\right]+R_A(a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right]+R_A a^3\left[-\frac{1}{3}\right]+P(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3}+\frac{a}{2}\right]\right.$$
$$+Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right]+R_A(a+b+c)^3\left[\frac{1}{3}\right]+R_A(a+b)^3\left[-\frac{1}{3}\right]$$
$$+P(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{a}{2}\right]+P(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{a}{2}\right]$$
$$\left.+Q(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{(a+b)}{2}\right]+Q(a+b)^3\left[-\frac{1}{6}\right]\right\}$$
$$+\frac{(a+b+c)}{EIL}\left\{R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right]+R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3}-\frac{L}{2}\right]+PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right]\right.$$
$$+P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(L+a)(a+b+c)}{2}-La\right]$$
$$+QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right]$$
$$+Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2}-L(a+b)\right]$$
$$\left.+WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right]+W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}$$

$$\delta_{D=}\frac{L-(a+b+c)}{EIL}\left\{R_A(a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right]+Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right]+R_A(a+b+c)^3\left[\frac{1}{3}\right]+R_A(a+b)^3\left[-\frac{1}{3}\right]\right.$$

$$+P(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{a}{2}\right]+Q(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{(a+b)}{2}\right]$$

$$\left.+Q(a+b)^3\left[-\frac{1}{6}\right]\right\}$$

$$+\frac{(a+b+c)}{EIL}\left\{R_AL^3\left[\frac{1}{6}\right]+R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3}-\frac{L}{2}\right]+PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right]\right.$$

$$+P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(L+a)(a+b+c)}{2}-La\right]$$

$$+QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right]$$

$$+Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2}-L(a+b)\right]$$

$$\left.+WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right]+W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}\ldots\ldots\ldots\text{Ec.}(43)$$

Ecuación para el cálculo del diámetro del eje

Una vez que se han encontrado las deflexiones en los puntos “B”, “C” y “D” ocasionadas por las fuerzas, se sustituyen las deflexiones en la ecuación de Rayleigh-Ritz:

$$\omega_c=\sqrt{\frac{g(P\delta_B+Q\delta_C+W\delta_D)}{P\delta_B^2+Q\delta_C^2+W\delta_D^2}}\ldots\ldots\ldots\text{Ec.}(44)$$

Como las expresiones de las deflexiones son muy extensas se harán unos arreglos:

$$\delta_B=\frac{1}{I}\delta_B'\ldots\ldots\ldots\text{Ec.}(45)$$

$$\delta_C=\frac{1}{I}\delta_C'\ldots\ldots\ldots\text{Ec.}(46)$$

$$\delta_D=\frac{1}{I}\delta_D'\ldots\ldots\ldots\text{Ec.}(47)$$

Donde:

$$\delta'_B = \frac{a}{EL}\left\{+R_A a^2\left[-\frac{L}{6}\right] + Pa^2\left[\frac{a}{6}-\frac{L}{2}\right] + Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{6}-\frac{L}{2}\right] + R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] + PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right] \right.$$
$$+ QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right] + WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right]$$
$$\left. + W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}$$

$$\delta'_C = \frac{L-(a+b)}{EL}\left\{R_A(a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right] + P(a+b)^2\left[-\frac{(a+b)}{3}+\frac{a}{2}\right] + Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right]\right\}$$
$$+ \frac{(a+b)}{EIL}\left\{R_A(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{3}-\frac{L}{2}\right]\right.$$
$$+ P(a+b)\left[-\frac{(a+b)^2}{3}+\frac{(L+a)(a+b)}{2}-La\right] + Q(a+b)^2\left[\frac{(a+b)}{6}-\frac{L}{2}\right]$$
$$+ R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] + PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right] + QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right] + WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right]$$
$$\left. + W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}$$

$$\delta'_D = \frac{L-(a+b+c)}{EL}\left\{R_A(a+b)^3\left[\frac{1}{3}\right] + Pa^3\left[-\frac{1}{6}\right] + R_A(a+b+c)^3\left[\frac{1}{3}\right] + R_A(a+b)^3\left[-\frac{1}{3}\right]\right.$$
$$+ P(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{a}{2}\right] + Q(a+b+c)^2\left[-\frac{(a+b+c)}{3}+\frac{(a+b)}{2}\right]$$
$$\left. + Q(a+b)^3\left[-\frac{1}{6}\right]\right\}$$
$$+ \frac{(a+b+c)}{EIL}\left\{R_A L^3\left[\frac{1}{6}\right] + R_A(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{3}-\frac{L}{2}\right] + PL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{a}{2}\right]\right.$$
$$+ P(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(L+a)(a+b+c)}{2}-La\right]$$
$$+ QL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b)}{2}\right]$$
$$+ Q(a+b+c)\left[-\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(L+a+b)(a+b+c)}{2}-L(a+b)\right]$$
$$\left. + WL^2\left[-\frac{L}{6}+\frac{(a+b+c)}{2}\right] + W(a+b+c)^2\left[\frac{(a+b+c)}{6}-\frac{L}{2}\right]\right\}$$

Ahora se sustituirán las ecuaciones 45, 46 y 47 en la ecuación de Rayleigh-Ritz:

$$\omega_C = \sqrt{\frac{g\left[P\frac{\delta'_B}{I} + Q\frac{\delta'_C}{I} + W\frac{\delta'_D}{I}\right]}{P\left(\frac{\delta'_B}{I}\right)^2 + Q\left(\frac{\delta'_C}{I}\right)^2 + W\left(\frac{\delta'_D}{I}\right)^2}} \ldots\ldots\ldots \text{Ec. } (48)$$

De la ecuación 48 se despejará el momento de inercia:

$$\omega_C = \sqrt{\frac{\frac{g}{I}[P\delta'_B + Q\delta'_C + W\delta'_D]}{\frac{1}{I^2}[P(\delta'_B)^2 + Q(\delta'_C)^2 + W(\delta'_D)^2]}}$$

$$(\omega_C)^2 = \frac{I^2 g[P\delta'_B + Q\delta'_C + W\delta'_D]}{I[P(\delta'_B)^2 + Q(\delta'_C)^2 + W(\delta'_D)^2]}$$

$$(\omega_C)^2 = \frac{Ig[P\delta'_B + Q\delta'_C + W\delta'_D]}{P(\delta'_B)^2 + Q(\delta'_C)^2 + W(\delta'_D)^2}$$

$$I = \frac{(\omega_C)^2[P(\delta'_B)^2 + Q(\delta'_C)^2 + W(\delta'_D)^2]}{g[P\delta'_B + Q\delta'_C + W\delta'_D]} \ldots\ldots\ldots \text{Ec. } (49)$$

Recordando que el momento de inercia del círculo es:

$$I = \frac{\pi}{64} d^4 \ldots\ldots\ldots \text{Ec. } (50)$$

Entonces se sustituye la ecuación 50 en la ecuación 49 y se tiene:

$$\frac{\pi}{64} d^4 = \frac{(\omega_C)^2[P(\delta'_B)^2 + Q(\delta'_C)^2 + W(\delta'_D)^2]}{g[P\delta'_B + Q\delta'_C + W\delta'_D]}$$

$$d^4 = \frac{64(\omega_C)^2[P(\delta'_B)^2 + Q(\delta'_C)^2 + W(\delta'_D)^2]}{g\pi[P\delta'_B + Q\delta'_C + W\delta'_D]}$$

$$\mathbf{d} = \sqrt[4]{\frac{\mathbf{64(\boldsymbol{\omega}_C)^2[P(\boldsymbol{\delta}'_B)^2 + Q(\boldsymbol{\delta}'_C)^2 + W(\boldsymbol{\delta}'_D)^2]}}{\mathbf{g\boldsymbol{\pi}[P\boldsymbol{\delta}'_B + Q\boldsymbol{\delta}'_C + W\boldsymbol{\delta}'_D]}}} \ldots\ldots\ldots \text{Ec. } (51)$$

En la ecuación anterior la primera velocidad crítica esta dada en rad/seg, en caso de que la velocidad critica este dada en R.P.M se tiene que:

$$\mathbf{d} = \sqrt[4]{\frac{\mathbf{64}\left[\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{C}}\left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{60}}\right)\right]^{\mathbf{2}}[\mathbf{P}(\boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{B}})^{\mathbf{2}} + \mathbf{Q}(\boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{C}})^{\mathbf{2}} + \mathbf{W}(\boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{D}})^{\mathbf{2}}]}{\mathbf{g\pi}[\mathbf{P}\boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{B}} + \mathbf{Q}\boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{C}} + \mathbf{W}\boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{D}}]}} \ldots\ldots\ldots \text{Ec.}\,(52)$$

Donde:

$\mathrm{d} = \text{Diámetro del eje (m ó in)}$

$\mathrm{P} = \text{Primera fuerza (N ó Lb)}$

$\mathrm{Q} = \text{Segunda fuerza (N ó Lb)}$

$\mathrm{W} = \text{Tercera fuerza (N ó Lb)}$

$\delta'_B = \text{Deflexión en el punto B } (\mathrm{m}^5 \text{ ó } \mathrm{in}^5)$

$\delta'_C = \text{Deflexión en el punto C } (\mathrm{m}^5 \text{ ó } \mathrm{in}^5)$

$\delta'_D = \text{Deflexión en el punto D } (\mathrm{m}^5 \text{ ó } \mathrm{in}^5)$

$\mathrm{g} = \text{Aceleración de la gravedad } \left({}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{seg}^2} \text{ ó } {}^{\mathrm{in}}/_{\mathrm{seg}^2}\right)$

MATLAB

Es un lenguaje de alto nivel orientado al desarrollo de cálculos técnicos. Integra cálculo, visualización y programación en un entorno interactivo de fácil manejo donde los problemas y las soluciones se expresan en la notación matemática habitual.

El elemento de información básico en MATLAB es una tabla a la que no hace falta asignar dimensión con antelación. Esto permite abordar problemas que requieren una formulación vectorial o matricial en mucho menos tiempo de lo que se tardaría con un lenguaje escalar no interactivo.

Como entrar y salir de MatLab

Para entrar en MATLAB basta pulsar dos veces seguidas el botón izquierdo del ratón sobre el icono correspondiente. Aparece entonces la ventana de comandos y, en su interior, el indicador (prompt) >>.

MATLAB está listo para recibir nuestras instrucciones. Para salir del programa basta teclear quit y pulsar la tecla Enter (toda instrucción en MATLAB debe concluir pulsando esta tecla por lo que, de ahora en adelante, omitiremos dicha acción). Otra opción es desplegar el menú File y desplazar la barra hasta la opción Exit MATLAB

Para obtener ayuda

El comando (help) constituye la forma más básica de conocer la sintaxis y el comportamiento de una función en particular. Su formato es:

(help nombre_de_funcion)

Y la información solicitada aparece directamente en la ventada de comandos. En dicha información MATLAB emplea letras mayúsculas para referirse a la función y a los nombres de variables, con objeto de destacarlos del resto del texto. Sin embargo, a la hora de utilizar la función en cuestión siempre escribiremos su nombre con letras minúsculas. MATLAB distingue entre ambos tipos de letras (case sensitive) y todos los nombres de función son, de hecho, en minúscula. Si no queremos que la información aparezca en la ventana de comandos podemos recurrir a una ventana auxiliar, la ventana de ayuda. Ésta se invoca mediante la orden helpwin o seleccionando la opción Help Window del menú Help. Se puede acceder directamente a una función concreta mediante la instrucción helpwin nombre_de_funcion. Una ventaja de la ventana de ayuda es que provee enlaces con otras cuestiones relacionadas con la información que hayamos solicitado.

Operadores

Suma	+	Menor que	<
Potencia	^	Mayor que	>
Resta	-	Menor o igual que	<=
Multiplicación	*	Mayor o igual que	>=
División	/	Diferente	~=
División izquierda	\	And (y)	&
Traspuesta	C=A’	Or (ó)	|
Igual que	==	Not (no)	~

Tabla1. Símbolos de los operadores

Variables en MatLab

- Todas las variables están almacenadas en 32 bit
- No distingue entre variables reales y enteras
- Distingue mayúsculas, en *Matlab* A ≠ a
- Los nombres tienen que empezar por una letra no obstante se puede usar además de letras nombres y símbolos
- Todo el cálculo se hace en doble precisión format puede ser usado para cambiarlo.
- Un “;” al final de la línea no muestra el resultado de la operación
- Permite la definición de variables globales y locales
- Lista de variables who, Borrarlas clear, más información Whos

Espacio de trabajo

El espacio de trabajo es la zona de memoria donde se almacenan las variables que vamos introduciendo desde la línea de comandos. Podemos utilizar las órdenes (who y whos) para mostrar el contenido actual del espacio de trabajo.

La primera da una lista abreviada mientras que la segunda proporciona el tamaño y el tipo de datos asociados a cada variable. Para borrar todas las variables almacenadas en el espacio de trabajo, utilizamos el comando clear sin más. Es posible guardar en un archivo el contenido del espacio de trabajo y recuperarlo después durante la misma sesión u otra posterior.

Para guardar todo el contenido del espacio de trabajo utilizamos el comando (sabe). Por ejemplo, save [a:\]sesion (lo que aparece entre corchetes es opcional) guarda todo el contenido del espacio de trabajo en el archivo sesion.mat (MATLAB añade automáticamente la extensión mat, de ahí que los archivos así generados se conozcan como archivos MAT). Si no pones a:\ el archivo se almacenará en tu directorio de trabajo, pero si pones a:\ el archivo se guardará en un disquete que, previamente, deberás haber introducido. Es posible guardar sólo variables concretas especificando el nombre de las mismas después del nombre del archivo. Por ejemplo, save [a:\]sesion x y z sólo guarda las variables x, y y z en el archivo sesion.mat. Por defecto los datos se almacenan en formato binario (no legible por nosotros), pero es posible hacerlo en formato ASCII (legible por nosotros) añadiendo los modificadores -ascii o -ascii -double al final de la instrucción. El primero utiliza 8 dígitos para cada número y el segundo utiliza 16. Si elegimos este formato conviene:

1. Especificar una extensión para el nombre del archivo distinta de mat. Las más usuales son dat y txt.

2. Guardar a lo sumo una variable.

Por ejemplo, save [a:\]sesion.dat x -ascii. Otro modificador que podemos utilizar con save es -append. Con él, los datos se agregan a un archivo MAT ya existente. Por ejemplo, save [a:\]sesion x -append añade la variable x al archivo sesion.mat (que ya debe existir).

Para recuperar la información almacenada en un archivo MAT utilizamos el comando load. Por ejemplo, load [a:\] sesion carga el contenido de sesion.mat en el espacio de trabajo. Pondremos a:\ o no según el archivo esté en un disquete o en nuestro directorio de trabajo. Si el archivo MAT contiene tres variables llamadas A, B y C, al cargarlo dichas variables retornan al espacio de trabajo sobrescribiendo las que ya pudieran existir con el mismo nombre.

El efecto del comando (load) sobre un archivo en formato ASCII es completamente distinto, de ahí las recomendaciones anteriores para guardar datos en dicho formato. Por ejemplo, load [a:\]sesion.dat crea una nueva variable en el espacio de trabajo llamada sesión. Esto obliga a que el contenido del fichero (sesion.dat) tenga formato de matriz numérica. Si no es así, se producirá un error de lectura. El contenido es admisible (es una matriz 2 por 4), pero no lo es (la segunda fila tiene una columna menos que la primera).

Finalizamos este apartado con una breve descripción del comando (diary). Si escribimos diary [a:\]sesion.txt se creará el archivo (sesion.txt), en el cual se hará una copia literal de cuanto escribamos desde ese momento así como de los resultados que se vayan obteniendo. El proceso de copiado finalizará cuando escribamos (diary off). Luego, con un procesador de texto, podremos abrir el archivo (sesion.txt) y repasar todos los pasos que hemos dado en la sesión.

Archivos .m

Los archivos M son archivos de texto (archivos ASCII) que contienen instrucciones propias de MATLAB. Se llaman así porque su nombre tiene (obligatoriamente) la extensión m.

Como archivos de texto, los archivos M se pueden crear con cualquier procesador. Recomendamos, no obstante, utilizar el editor que trae incorporado MATLAB. Para ello, cuando queramos crear un nuevo archivo M, debemos seguir el siguiente esquema:

Creación de un nuevo archivo .m	
Llamada al editor	Si todavía no estamos en nuestro directorio de trabajo, nos pasamos a él.
	Tecleamos edit (aparece una ventana llamada MATLAB Editor/Debugger y en su interior otra de nombre Untitled1).
Creación del archivo	Escribimos el texto del archivo.
Guardamos lo escrito	En el menú File elegimos Save As (aparece una ventana llamada Guardar Como).
	Si queremos guardar el archivo en un USB, ascendemos de nivel hasta llegar a Mi Pc. Una vez ahí pinchamos en USB (A:).
	En el campo Nombre de archivo escribimos el nombre que queramos ponerle, sin la extensión.
	Pulsamos el botón Guardar.
Salimos del editor	En el menú File elegimos Exit Editor/Debugger

Tabla 2. Como crear un archivo .m

Para editar un archivo ya existente, con objeto de revisarlo y/o modificarlo, seguimos el mismo esquema pero con las siguientes variantes:

- Invocamos el editor con edit [a:\]nombre_del_archivo.
- Si cambiamos el texto y queremos guardar las modificaciones en el mismo archivo, elegimos (Save) en el menú File. Si queremos guardarlas en otro archivo, elegimos (Save As) en el menú File y seguimos los mismos pasos del esquema anterior.

En cualquier momento podemos conocer los archivos M existentes en nuestro directorio de trabajo tecleando what. También podemos revisar el contenido de un archivo M sin necesidad de llamar al editor. Basta teclear type [a:\]nombre_del_archivo. Hay dos tipos de archivos M: de guión y de función. Los archivos M de guión son los más simples:

- No tienen argumentos de entrada ni de salida.
- Son útiles para automatizar bloques de instrucciones y cálculos que deben efectuarse repetidamente.
- Pueden operar sobre datos ya existentes en el espacio de trabajo o sobre datos que ellos mismos introduzcan.
- Cualquier variable creada por uno de estos archivos permanece en el espacio de trabajo una vez que finaliza su lectura.

En cambio, los archivos M de función:

- Aceptan argumentos de entrada y salida.
- Sirven para extender el lenguaje de MATLAB creando nuestras propias funciones.
- Tienen su propio espacio de trabajo reservado, donde pueden definirse variables propias (locales) que no afectan al espacio de trabajo general.

La estructura del texto de un archivo M de guión es totalmente libre (siempre que se ajuste, por supuesto, a las instrucciones de MATLAB). Además, podemos y debemos incluir comentarios que aclaren el contenido del archivo. Tales comentarios han de ir precedidos por el símbolo de tanto por ciento: %.

Por ejemplo, para crear un archivo M de guión que reproduzca el ejemplo de construcción por bloques, escribiremos lo siguiente:

% Ejemplo de construcción de una matriz por bloques.

% Apuntes sobre MatLab

B1 = [1 -3 5; 2 3 4; -7 8 9]

B2 = 5*eye(3)

% Como B1 y B2 van a estar a un mismo nivel,

% deben tener el mismo número de filas.

```
B3 = zeros(2,1)

B4 = ones(2,3)

B5 = fliplr(2*eye(2))

% Como B3, B4 y B5 van a estar a un mismo nivel,

% deben tener el mismo número de filas.

A = [B1 B2; B3 B4 B5]

% Los dos niveles deben tener el mismo número de columnas.
```

Si hemos guardado el archivo con el nombre bloques.m, bastará escribir bloques en la línea de comandos para que se ejecuten de una vez todas las instrucciones.

La estructura de un archivo M de función es un poco más complicada. Sus elementos básicos son una línea de definición, una línea H1, texto de ayuda, el cuerpo de la función y comentarios adicionales. Por ejemplo, para crear una función que calcule la superficie de un círculo, éste podría ser el contenido del archivo:

```
function s = supcirc(r)

% SUPCIRC Superficie de un círculo

% SUPCIRC(R), donde R es una matriz, calcula la superficie de los círculos

% cuyos radios son los coeficientes de la matriz.

s = pi * r.^2;
```

La primera línea de texto es la línea de definición. En ella hay que destacar cuatro cosas:

- La palabra clave function. Indica a MATLAB que el archivo M contiene una función.
- El argumento de salida s. En este caso sólo hay uno, pero podría haber más. Cuando esto ocurre, deben encerrarse todos entre corchetes y separarse por comas. También puede ocurrir que no haya argumentos de salida y en tal caso utilizaremos dos corchetes vacíos: [ ].

- El nombre de la función supcirc. Las reglas para los nombres de las funciones son las mismas que para las variables. Importante: el nombre del archivo M debe coincidir con el de la función.
- El argumento de entrada r. Va encerrado entre paréntesis. Puede haber más de uno, en cuyo caso irán separados por comas.

Éstos son otros ejemplos válidos de líneas de definición:

function [x,y,z] = esfera(theta, phi, rho)

function [ ] = sinsalida(x)

Control de flujo

MATLAB tiene cinco construcciones de control de flujo:

- enunciados if,
- enunciados switch,
- bucles while,
- bucles for y
- enunciados break.

El enunciado if evalúa una expresión lógica y ejecuta un grupo de instrucciones según el valor de la misma. En su forma más simple, su estructura es

if *expresion_logica instrucciones*

end

Si la expresión es verdadera, MATLAB ejecuta todas las órdenes entre las líneas if y end. Si la expresión es falsa, MATLAB no ejecuta dichas instrucciones. Los comandos opcionales elseif y else permiten la ejecución alternativa de varios grupos de instrucciones. Por ejemplo:

if *expresion_1*

instrucciones_1

elseif *expresion_2*

instrucciones_2

else

instrucciones_3

end

Hace lo siguiente:

1. Evalúa *expresion_1*.

2. Si es verdadera, ejecuta *instrucciones_1* y termina. Si es falsa, evalúa *expresion_2*.

3. Si *expresion_2* es verdadera, ejecuta *instrucciones_2* y termina. Si es falsa, ejecuta *instrucciones_3*.

En toda expresión lógica aparecen los llamados operadores relacionales: < (menor que), <= (menor o igual que), > (mayor que), >= (mayor o igual que), == (igual que) y ~= (distinto de). Estos operadores permiten comparar dos escalares, dos matrices de la misma dimensión (elemento a elemento) o un escalar con una matriz (cada elemento de la matriz se compara con el escalar). En el primer caso, la expresión vale 1 si es verdadera y 0 si es falsa. En los otros dos, la expresión da un matriz de ceros y unos de igual dimensión que la o las matrices implicadas. Se entenderá que la expresión es verdadera cuando todos los coeficientes sean unos. Dos expresiones lógicas pueden a su vez compararse entre sí mediante los operadores lógicos & y |. El enunciado expresion_1 & expresion_2 es verdadero si y sólo si ambas expresiones lo son, mientras que el enunciado expresion_1 | expresion_2 es verdadero si y sólo si al menos una de las dos expresiones lo es. El operador ~ sirve para negar una expresión. Así, ~expresión es verdadera si y sólo si expresión es falsa y viceversa.

El enunciado switch ejecuta ciertas instrucciones en función del valor de una variable o expresión. Su estructura es la siguiente:

switch *expresion*

case *valor_1*

instrucciones_1

case *valor_2*

instrucciones_2

otherwise

otras_instrucciones

end

Como vemos el enunciado consta de:

1. La palabra switch seguida de una expresión a evaluar.

2. Varios grupos case. Cada grupo consiste en una primera línea con la palabra clave case seguida de un posible valor para *expresion*. Las líneas siguientes del grupo contienen las instrucciones a ejecutar en caso de que *expresion* tome ese valor. Sólo se ejecuta el primer grupo case cuyo valor coincide con el de la expresión.

3. Un grupo otherwise. Consiste en una primera línea con dicha palabra clave seguida de otras líneas con las órdenes a ejecutar en caso de que el valor de *expresion* no coincida con ninguno de los establecidos en los grupos case.

4. Una línea con la palabra clave end. El bucle while ejecuta una instrucción o un grupo de instrucciones mientras que cierta expresión de control sea verdadera. Su estructura es la siguiente:

while *expresion*

instrucciones

end

Gráficos

MATLAB dispone de un gran número de herramientas que permiten visualizar vectores y matrices como gráficos. Aquí tan sólo describimos, brevemente, algunos de ellos.

Para crear un gráfico bidimensional utilizamos el comando plot, el cual admite distintos formatos. Si y es un vector, plot(y) produce un gráfico lineal a trozos de los elementos de y frente a los índices de dichos elementos. Si x e y son dos vectores de la misma longitud, plot(x,y) produce un gráfico lineal a trozos de y frente a x. Por ejemplo, para dibujar la gráfica de la función seno en el intervalo [0,2pi] escribiremos

t = 0: pi/100:2*pi;

y = sin(t);

plot(t,y)

Múltiples parejas x-y permiten crear varias gráficas, cada una de un color distinto, con una sola llamada a plot. Probemos con

y2 = sin(t-0.25);

y3 = sin(t-0.5);

plot(t,y,t,y2,t,y3)

Es posible especificar el color, cómo se unen los puntos (estilo de línea) y cómo se marcan los puntos (marcadores) con

plot(x,y,'color_estilo_marcador')

Donde: color_estilo_marcador es una cadena de uno, dos o tres caracteres construida en base a las siguientes posiblidades:

- Los colores disponibles son c, m, y, r, g, b, w y k, que corresponden a turquesa, magenta, amarillo, rojo, verde, azul, blanco y negro.
- Los estilos disponibles son -, --, :, -. y none, que corresponden a continuo, con guiones, punteado, con guiones y puntos y sin línea.
- Los marcadores más habituales son +, o, * y x.

La instrucción

plot(x,y,'y:+')

Dibuja la gráfica en color amarillo, punteada y con el marcador + en cada uno de los puntos correspondientes a los datos. Si especificamos un marcador pero no un estilo de línea, MATLAB sólo dibuja los marcadores.

La función plot abre automáticamente una ventana gráfica (figure window) si no hay ninguna abierta en la pantalla. Si ya existe una ventana gráfica, plot la utiliza por defecto, borrando todo lo que en ella hubiera dibujado. Para abrir una nueva ventana gráfica y que pase a ser la ventana en uso, escribimos figure. Para que una ventana gráfica ya existente pase a ser la ventana en uso escribimos figure(n), donde n es el número que aparece en la barra superior de la ventana. Los resultados de los comandos gráficos que ejecutemos a continuación se mostrarán en dicha ventana.

El comando hold permite añadir elementos diversos a un gráfico ya existente. Cuando tecleamos hold on MATLAB protege el gráfico de la ventana actual y superpone al mismo los efectos de los nuevos comandos gráficos que ejecutemos, reescalando si es necesario. Por ejemplo, escribamos

hold on

y4 = cos(t);

plot(t,y4,'b:*')

Y veremos cómo la gráfica del coseno se dibuja sobre el último gráfico creado. La orden se desactiva con hold off.

La función subplot permite dividir una ventana gráfica en varias ventanas más pequeñas y dibujar en cada una de ella gráficos distintos. Al escribir

subplot(m,n,p)

La ventana gráfica actual se divide en m por n subventanas, numeradas de izquierda a derecha y de arriba abajo, y selecciona la ventana número p como ventana actual.

La función axis permite modificar el aspecto de la caja donde se va a dibujar el gráfico. Por defecto, MATLAB encuentra el máximo y el mínimo entre los datos que le damos y elige unas dimensiones y un etiquetado de los ejes adecuado. Pero podemos establecer los límites que queramos para los ejes escribiendo axis ([xmin xmax ymin ymax]). Con axis square conseguimos que las dimensiones de los ejes sean las mismas. Con axis equal logramos que incrementos iguales en ambos ejes midan lo mismo. La orden axis auto nos devuelve al escalado por defecto. Si escribimos grid on el gráfico aparece en una cuadrícula. Con grid off la cuadrícula desaparece. Las funciones xlabel, ylabel y zlabel (ésta última para gráficos tridimensionales) permiten poner nombres a los ejes coordenados. Si queremos, por ejemplo, llamar al eje x por su nombre escribiremos

```
xlabel('Eje x')
```

La orden title permite poner nombre al gráfico representado. Su formato es

```
title('titulo_del_grafico')
```

MATLAB también permite representar superficies de la forma z=f(x,y). Para ello disponemos de dos comandos, mesh y surf. El funcionamiento es análogo en ambos: sobre una malla de una determinada parte del plano levantamos una serie de puntos y los unimos. La diferencia entre uno y otro comando está en la forma en que dicha unión se lleva a cabo. Mientras que mesh sólo colorea las líneas de unión, surf también da color a las porciones planas que aquellas delimitan. Supongamos que queremos representar la superficie z = xe-x2-y2 sobre el cuadrado [-2,2]x[-2,2]. Éstos son los pasos a seguir:

1. Construcción de la malla. Comenzamos creando una partición uniforme sobre el intervalo [-2,2] del eje x:

```
px = -2:0.2:2;
```

A continuación creamos otra sobre el intervalo [-2,2] del eje y:

```
py = -2:0.1:2;
```

Con estas particiones la malla tendría 21x41 puntos. Por último creamos dos matrices x e y con las siguientes características: las 21 filas de x son iguales y consisten en las abscisas de los puntos de la malla; las 41 columnas de y son iguales y consisten en las ordenadas de los puntos de la malla. Para ello escribimos [x,y] = meshgrid(px,py). Si px y py fueran iguales, bastaría escribir [x,y] = meshgrid(px).

2. Levantamiento de la función. Escribimos

```
z = x.*exp(-x.^2-y.^2);
```

3. Construcción de la gráfica. Escribimos mesh(x,y,z) o surf(x,y,z).

Antes de finalizar este apartado queremos insistir en que aquí está recogida tan sólo una ínfima parte de las posibilidades gráficas de MATLAB. Nos dejamos atrás aspectos como la representación de curvas en el espacio, la coloración, textura, iluminación, enfoque y proyección de superficies, la colocación de cámaras alrededor de una superficie que nos permitan movernos entorno a ella, la creación de gráficos de barras, áreas y sectores, la representación de campos vectoriales, la creación de contornos de superficies (curvas de nivel), el tratamiento de imágenes digitales, la modelización 3D, etc.

Otros aspectos interesantes.

Finalizamos esta introducción a MATLAB con algunas cuestiones que puedan sernos de utilidad. Empezamos con el control del tiempo. La orden clock muestra un vector de 6 componentes en notación decimal. Las tres primeras corresponden a la fecha actual y las tres últimas a la hora en curso. Si lo queremos en notación entera escribiremos fix(clock). Con esta orden podemos controlar el tiempo que tarda un programa en ejecutarse. Bastará hacer, por ejemplo,

```
tp1 = fix(clock(3:6));
```

Antes de la ejecución,

```
tp2 = fix(clock(3:6));
```

Después de ella y luego comparar tp1 con tp2.

Otro aspecto al que queremos hacer referencia es la evaluación de cadenas de caracteres, pues añade potencia y flexibilidad al lenguaje MATLAB. La función eval evalúa una cadena que contiene una expresión de MATLAB o un enunciado. En su forma más simple, su sintaxis es eval('cadena'). Por ejemplo, las siguientes instrucciones generan una matriz de orden n:

```
t = '1/(i+j-1)';

for i = 1:n

for j = 1:n

a(i,j) = eval(t);

end

end
```

La función feval ejecuta una función cuyo nombre aparece en una cadena. Su sintaxis es feval('cadena',dato_numerico) y su efecto es evaluar la función de nombre cadena en dato_numerico. El siguiente ejemplo permite elegir entre tres funciones distintas a evaluar:

```
fun = ['sin','cos','log'];

k = input('Elige un numero de funcion:');

x = input('Elige un punto para evaluar la funcion:');

feval(fun(k,:),x)
```

El argumento de la función eval puede ser una concatenación de cadenas de caracteres.

El siguiente ejemplo muestra cómo crear 10 variables de nombres P1, P2,..., P10 y que cada una tenga un valor distinto:

```
for k = 1:10

eval(['P',int2str(k),'=k^2'])

end
```

La orden int2str(k) transforma el valor numérico de k en una cadena de caracteres.

FUNCIONAMIENTO DE LA PROGRAMACION DEL CÁLCULO DE LA PRIMERA VELOCIDAD CRÍTICA DE UN EJE ESCALONADO Y CÁLCULO PARA EL DIAMETRO CONSTANTE DEL EJE

La programación de “Cálculo de la primera velocidad crítica de un eje escalonado y cálculo para el diámetro constante de un eje”, como su nombre nos lo indica, fue diseñado para ayudar a hacer de manera más fácil y rápido el cálculo para la obtención de la primera velocidad crítica de un eje escalonado mediante la ecuación de Rayleigh-Ritz, además también esta programación sirve para encontrar el diámetro de un eje, aclarando que solo puede calcular el diámetro del eje siempre y cuando sea constante ese diámetro a lo largo de todo el eje.

Al hacer correr el programa en la pantalla principal de MatLab que es el “Command Window” les preguntará primero que desea calcular si la primera velocidad crítica o el diámetro del eje, ver figura 35:

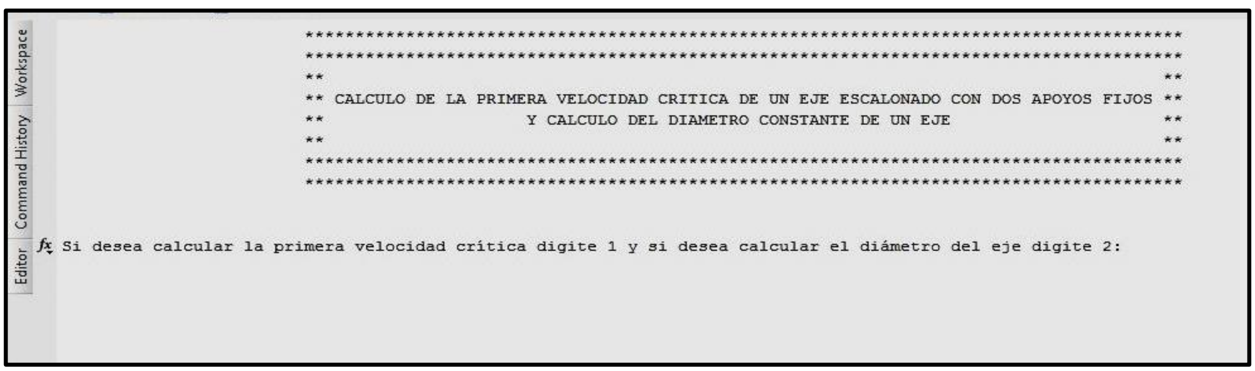


Figura 35. Vista del comienzo del programa

A continuación se le explicará el funcionamiento de esta programación por partes separadas, es decir, primero se les explicará como funciona la parte para la obtención de la primera velocidad crítica y después el funcionamiento de la obtención del diámetro del eje.

Cálculo de la primera velocidad crítica de un eje escalonado

Para calcular la primera velocidad crítica del eje se teclea el número uno y enseguida preguntará con que sistema de unidades se trabajará, al igual que anteriormente nos dará a escoger entre el sistema internacional (en este los valores deben ser dados en metros (distancias), Pascales (módulo elástico) y Newton (fuerzas))y el sistema inglés (en este los valores deben ser dados en pulgadas (distancias), Psi (módulo elástico) y Libras (fuerzas)); una vez escogido el sistema de unidades procederá a preguntar de cuantos tramos es el eje, es decir de cuantos diámetros esta compuesto el eje y por último preguntará a cuantas fuerzas esta sometido el eje, como se puede ver en la siguiente figura 36:

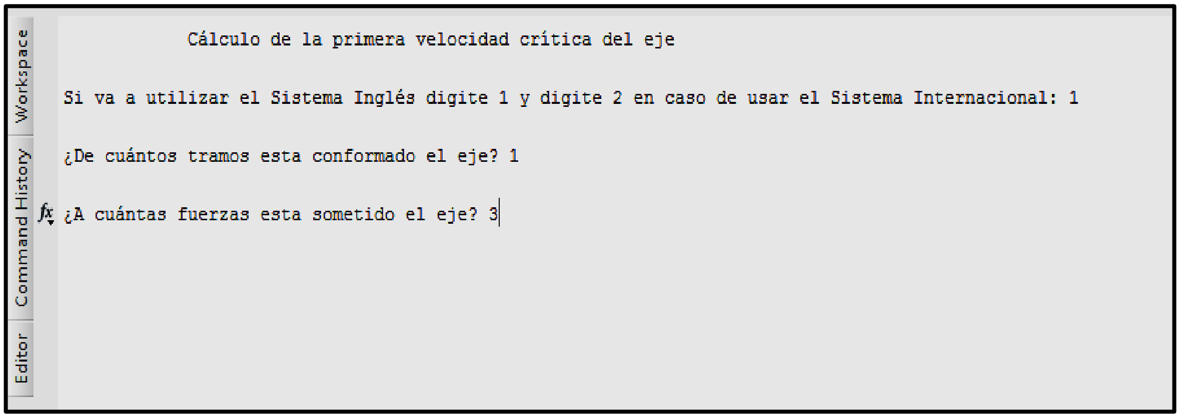


Figura 36. Vemos como el programa pide algunas referencias

Para ver cómo funciona el programa como ejemplo se ha decidido trabajar en el sistema inglés con eje de diámetro constante y que esta sometido a tres fuerzas; una vez especificado esto el programa pedirá los datos del problema a resolver, ver figura 37:

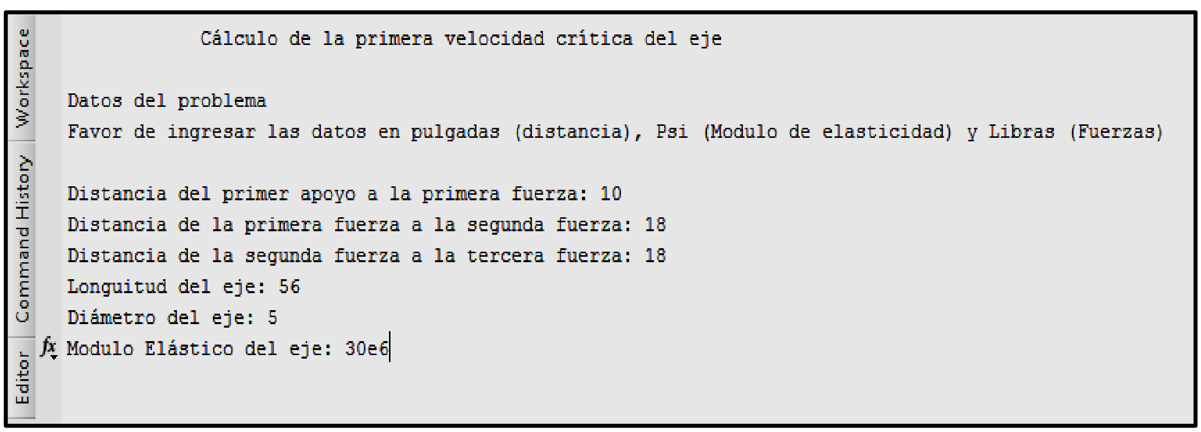


Figura 37. Datos que pide del problema que pide el programa

Se ha tomado como ejemplo que el eje tendrá un largo de 56 pulgadas, un módulo elástico de 30 Mpsi, un diámetro de 5 pulgadas, que la primera fuerza esta a 10 pulgadas del primer apoyo, la segunda fuerza esta a 18 pulgadas de la primera fuerza y que la tercera fuerza esta a 18 pulgadas de la segunda fuerza, al introducir estos datos del problema el programa empezará a trabajar y después de un corto tiempo enseñará en una gráfica como es el eje con las respectivas fuerzas y también procederá a pedir los valores de las fuerzas, se han dado los valores de la primera fuerza de 600 Libras, la segunda fuerza de 1000 Libras y la tercera fuerza de 600 Libras, una vez introducido estos valores el programa nos dará el resultado de la primera velocidad crítica tanto en radianes sobre segundos como también en revoluciones por minuto, ver figura:

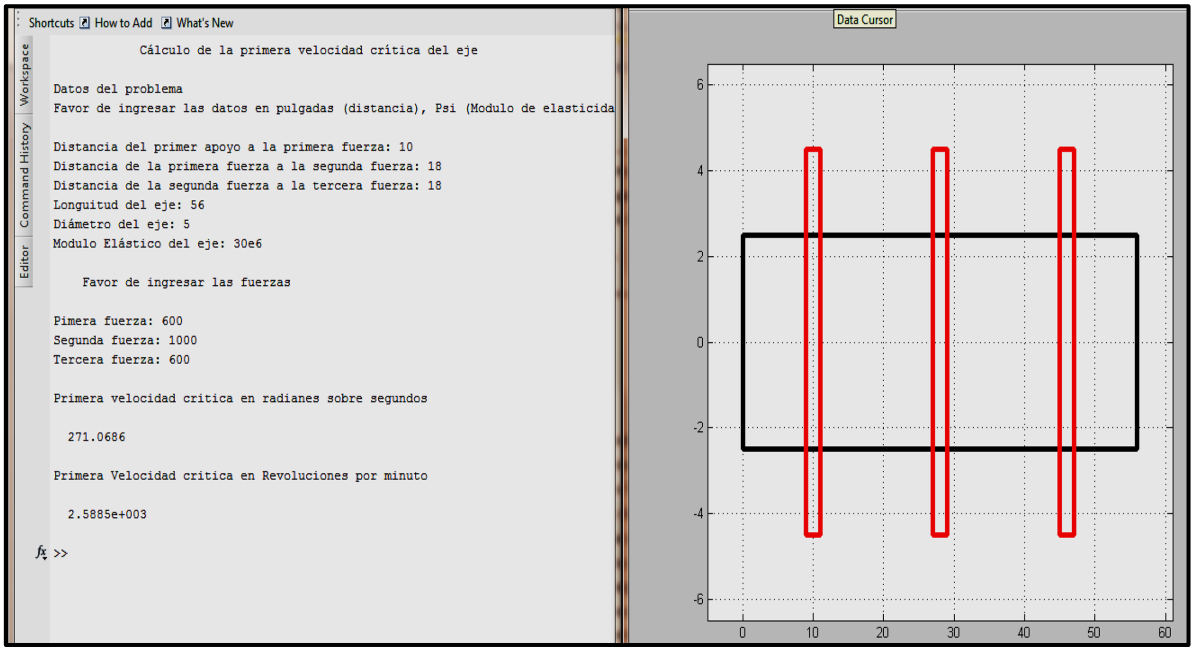


Figura 38. Resultado y gráfica del problema que se resolvió.

Como se puede observar con los datos ingresados dio que la primera velocidad crítica del eje es de 271.0686 rad/seg o de 2588.5rpm, además también de darnos una idea de como es el eje con los valores dados.

Si se deseara también saber otros resultados tales como los valores en las reacciones, las deflexiones en los puntos donde actúan las fuerzas o los momentos de inercia basta con teclear en el Command Window lo siguiente:

Para las reacciones en los apoyos es:

- Reaccion_en_el_primer_apoyo
- Reaccion_en_el_segundo_apoyo

Para el momento de inercia es:

- I

Para las deflexiones donde están las fuerzas es:

- deflexionB
- deflexionC
- deflexionD

A continuación se mostrará como aparecerá en Matlab estos resultados:

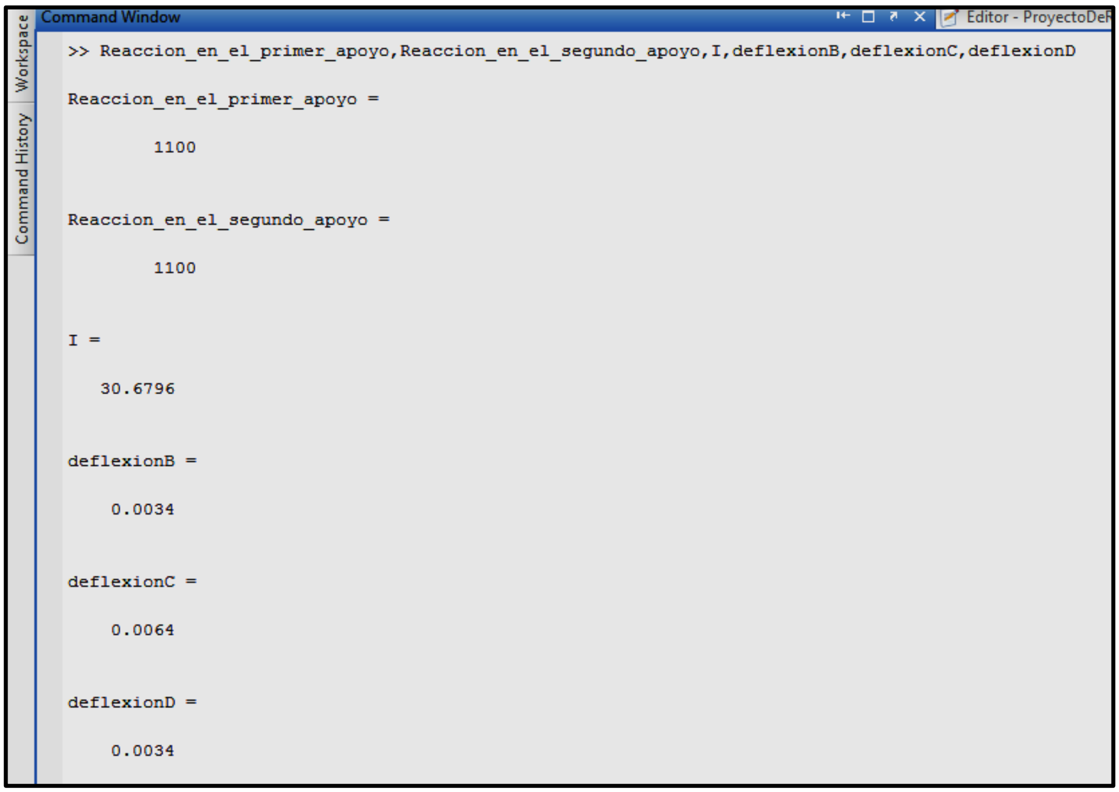


Figura 39. Otros resultados que podrían interesa

Cabe aclarar que para que el programa arrogue estos valores se debe escribir tal cual están, ya que si no es así MatLab nos marcará un error de que esa variable no existe, por ejemplo que se escribiera deflexionb en vez de deflexionB en el Command Window aparecería:

>>deflexionb

??? Undefined function or variable 'deflexionb'.

Hay que decir también que lo anterior solo es en caso de que el eje sea de diámetro constante y tenga tres fuerzas en él, a continuación se presentará que teclear en caso de que el eje sea de dos diámetro o tres, y este sometido a una o hasta tres fuerzas:

Para un eje de hasta tres diámetros y hasta tres fuerzas:

Para las reacciones en los apoyos es:

- Reaccion_en_el_primer_apoyo
- Reaccion_en_el_segundo_apoyo

Para el momento de inercia es:

- I1
- I2
- I3

Para las deflexiones donde actúan las fuerzas es:

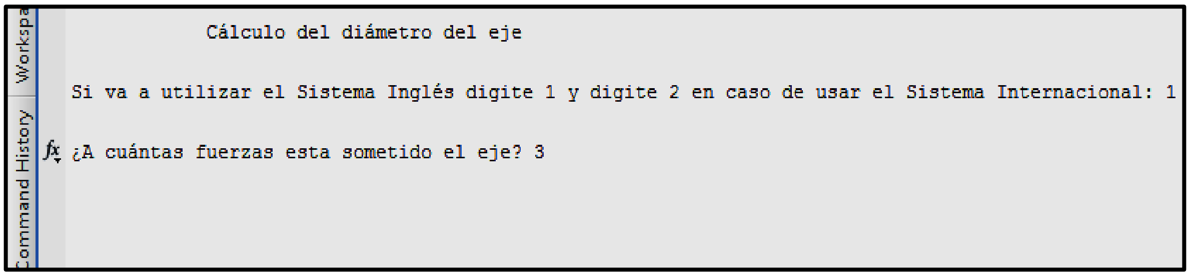
- deflexionB
- deflexionC
- deflexionD

Si el eje fuera de diámetro constante el valor del momento de inercia saldría tecleando solo “I”, así mismo con un eje de dos diámetros bastaría con teclear “I1” e “I2” para saber los momentos de inercia en cada tramo; y dependiendo de cuantas fuerzas se encuentren en el eje serían las deflexiones si existiera una fuerza bastaría teclear deflexionB y si existieran dos fuerzas se teclearía: deflexionB y deflexionC solamente, esto es independiente de cuantos diámetros este conformado el eje a analizar. Los valores de los apoyos, de las deflexiones y los momentos de inercia serán de acuerdo al sistema de unidades que este manejando.

Como se ha mencionado este programa puede calcular la primera velocidad crítica de un eje desde un diámetro contaste hasta un eje con tres diámetros y desde una fuerza hasta tres fuerzas (las fuerzas deben ser fuerzas puntuales), las combinaciones de las fuerzas y de los diámetros es indistinto tenga por seguro que el programa encontrará la velocidad crítica (ver anexo).

Cálculo del diámetro constante de un eje

Ahora se explicará como funciona esta parte del programa, al igual que lo anterior le preguntará en que sistema de unidades trabajará si en el sistema internacional (en este los valores deben ser dados en metros (distancias), Pascales (módulo elástico) y Newton (fuerzas)) o el sistema inglés (en este los valores deben ser dados en pulgadas (distancias), Psi (módulo elástico) y Libras (fuerzas)), una vez escogido el sistema de unidades, preguntará a cuantas fuerzas esta sometido el eje, como se puede ver en la figura 40:



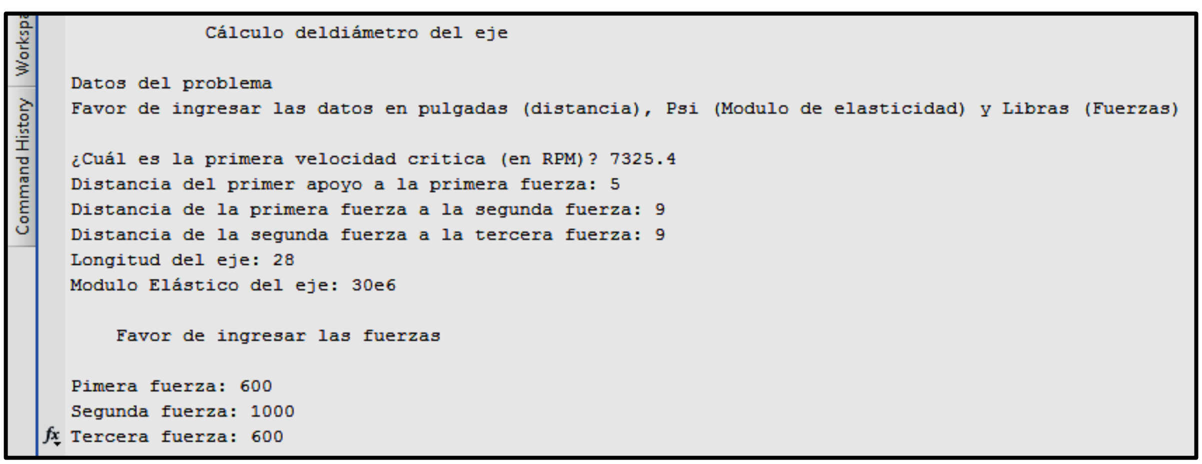
```
            Cálculo del diámetro del eje

Si va a utilizar el Sistema Inglés digite 1 y digite 2 en caso de usar el Sistema Internacional: 1

¿A cuántas fuerzas esta sometido el eje? 3
```

Figura 40. Nos pregunta el sistema a usar.

En este ejemplo se ha decidido trabajar con el sistema inglés y que el eje este sometido a tres fuerzas; una vez dado estas indicaciones nos procederá a preguntar las características del eje, nos pedirá la primera velocidad crítica la cual debe estar en revoluciones por minuto, nos preguntará las distancias a las que se encuentran las fuerzas, la longitud del eje, módulo elástico y las fuerzas a las que esta sometida el eje, ver figura 41:



```
            Cálculo deldiámetro del eje

Datos del problema
Favor de ingresar las datos en pulgadas (distancia), Psi (Modulo de elasticidad) y Libras (Fuerzas)

¿Cuál es la primera velocidad critica (en RPM)? 7325.4
Distancia del primer apoyo a la primera fuerza: 5
Distancia de la primera fuerza a la segunda fuerza: 9
Distancia de la segunda fuerza a la tercera fuerza: 9
Longitud del eje: 28
Modulo Elástico del eje: 30e6

    Favor de ingresar las fuerzas

Pimera fuerza: 600
Segunda fuerza: 1000
Tercera fuerza: 600
```

Figura 41. Datos del problema

Para el ejemplo se han dado los valores de 7325.4 rpm para la primera velocidad crítica, una distancia de 5 pulgadas entre el primer apoyo y la primera fuerza, una distancia de 9 pulgadas entre la primera fuerza y la segunda fuerza, una distancia de 9 pulgadas entre la segunda fuerza y la tercera fuerza, una longitud del eje de 28 pulgadas, un módulo elástico de 30 Mpsi, unas fuerzas de 600 libras, de 1000 libras y de 600 libras, hay que mencionar que cuando se da el módulo elástico tarda un poco el programa en pedir las fuerzas ya que en ese lapso es donde hace todo los cálculos el programa, ya una vez dado estos valores el programa nos arroga el valor del diámetro tanto en pulgadas como en pies y también nos da la gráfica del eje con esos datos y con el diámetro encontrado, como se puede ver a continuación:

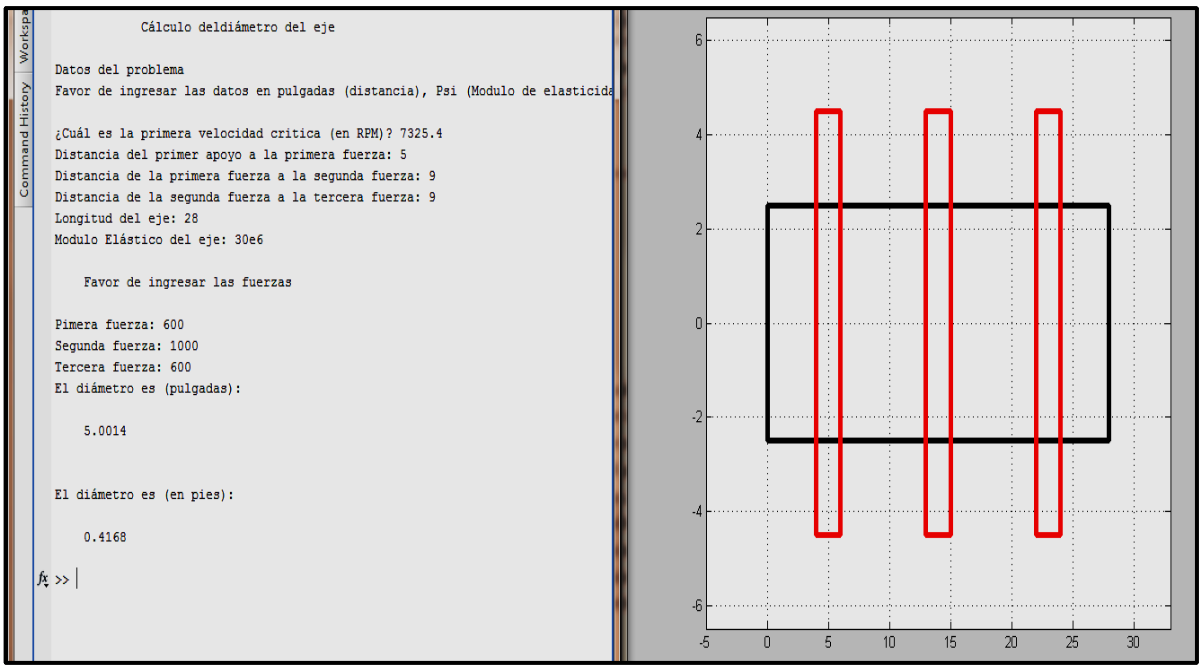


Figura 42. El resultado y una pequeña gráfica

Como se pude ver nos da como resultado que el eje tendría un diámetro de 5.0014 pulgadas si esta bajo esa primera velocidad crítica y también se puede ver como nos da la gráfica del eje bajo esas condiciones.

Al igual como se ha mencionado anteriormente, también se puede saber los valores que toman los apoyos, las deflexiones en función del momento de inercia, el momento de inercia y también las deflexiones ya con el momento de inercia evaluado. Solo bastaría teclear lo siguiente en el Command Windows:

Para las reacciones en los apoyos es:

- Reaccion_en_el_primer_apoyo
- Reaccion_en_el_segundo_apoyo

Para las deflexiones (en función del momento de inercia) donde están las fuerzas es:

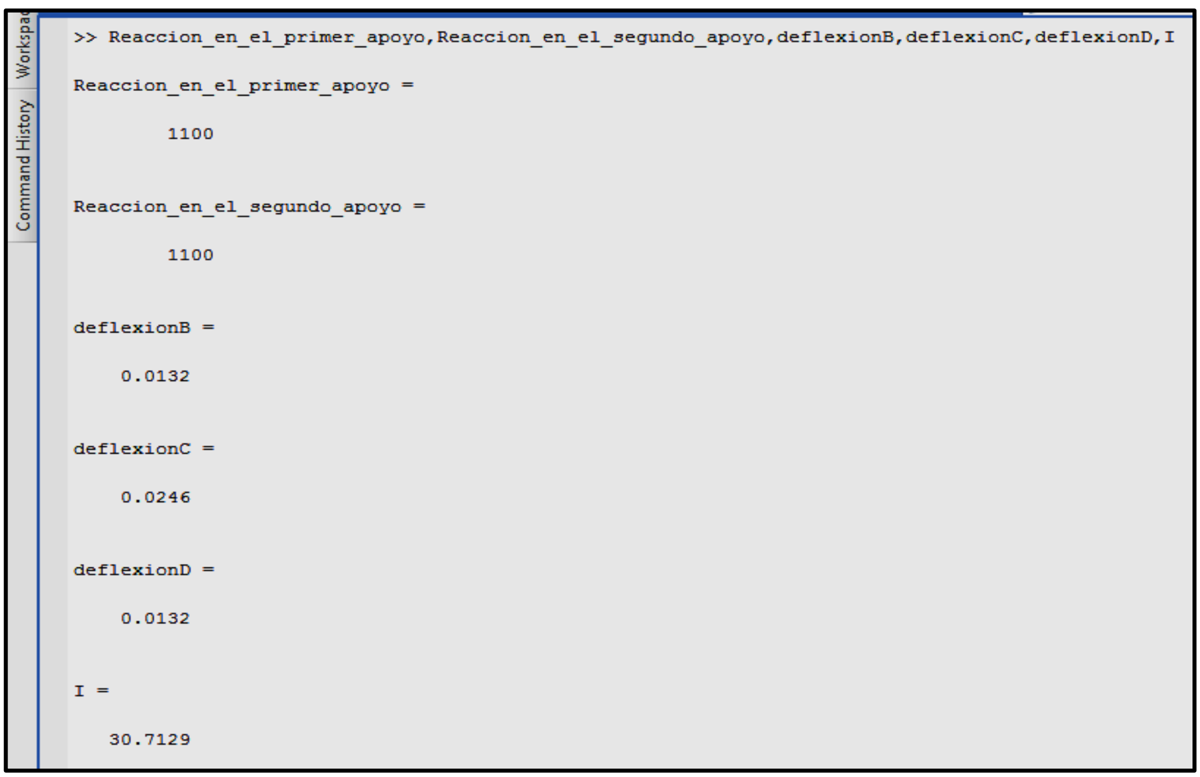
- deflexionB
- deflexionC
- deflexionD

Para el momento de inercia es:

- I

Para las deflexiones (ya con el momento de inercia evaluado) donde están las fuerzas es:

- DeflexionB
- DeflexionC
- DeflexionD



```
>> Reaccion_en_el_primer_apoyo,Reaccion_en_el_segundo_apoyo,deflexionB,deflexionC,deflexionD,I

Reaccion_en_el_primer_apoyo =

        1100


Reaccion_en_el_segundo_apoyo =

        1100


deflexionB =

    0.0132


deflexionC =

    0.0246


deflexionD =

    0.0132


I =

   30.7129
```

Figura 43. Algunos valores relevantes

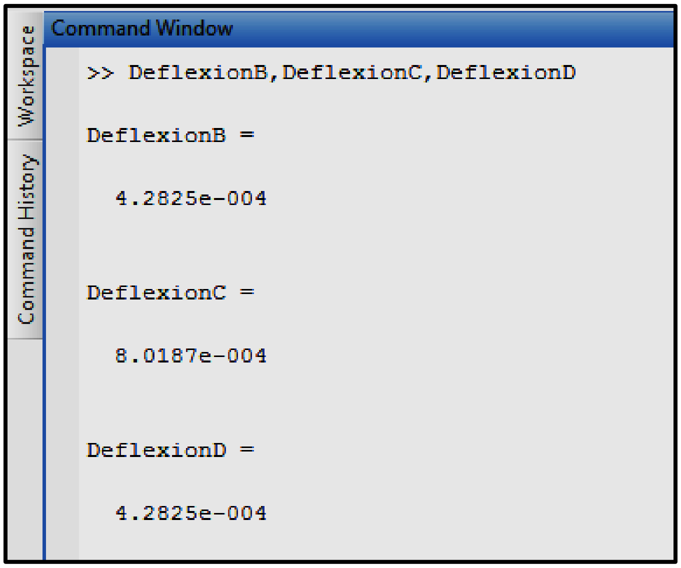


Figura 44. Más resultados interesantes.

Como se puede observar en las figuras 43 y 44, con teclear lo antes mencionado nos da los valores de lo que se desea saber, pero hay que aclarar nuevamente que se tiene que teclear tal y como ya se mencionó anteriormente, y las unidades dependerán del sistema de unidades que ustedes hayan elegido.

Y no está de más mencionar que esta parte del programa solo funciona para ejes con diámetros constantes y que puede estar sometida desde una fuerza hasta tres fuerzas.

Generalidades del programa

En esta parte se mostrará parte del programa ya que es muy extenso y usan los mismos comandos sólo que aplicado a diferentes ecuaciones, también se explicará brevemente para que sirven los comandos que se han utilizado en este programa.

Al ir al editor de MatLab para ver la configuración del programa se puede observar lo siguiente:

```
clc;clear all;clear,format short
fprintf('\t\t\t\t\t    **************************************************************************************\n');
fprintf('\t\t\t\t\t    **************************************************************************************\n');
fprintf('\t\t\t\t\t    **                                                                                  **\n');
fprintf('\t\t\t\t\t\t\t** CALCULO DE LA PRIMERA VELOCIDAD CRITICA DE UN EJE ESCALONADO CON DOS APOYOS FIJOS **\n');
fprintf('\t\t\t\t\t\t\t**                    Y CALCULO DEL DIAMETRO CONSTANTE DE UN EJE                     **\n');
fprintf('\t\t\t\t\t    **                                                                                  **\n');
fprintf('\t\t\t\t\t    **************************************************************************************\n');
fprintf('\t\t\t\t\t    **************************************************************************************\n');
fprintf('\n\n');
n1=input('Si desea calcular la primera velocidad crítica digite 1 y si desea calcular el diámetro del eje digite 2: ');
clc;
switch n1
    case 1
        fprintf('\t\t\tCálculo de la primera velocidad crítica del eje\n\n');
        g=input('Si va a utilizar el Sistema Inglés digite 1 y digite 2 en caso de usar el Sistema Internacional: ');
        fprintf('\n');
        n1=input('¿De cuántos tramos esta conformado el eje? ');
        fprintf('\n');
        n2=input('¿A cuántas fuerzas esta sometido el eje? ');
        clc;
        fprintf('\t\t\tCálculo de la primera velocidad crítica del eje\n\n');
        syms x P Q W
        switch g
            case 1 %Sistema Inglés
                fprintf('Datos del problema\n');
                fprintf('Favor de ingresar las datos en pulgadas (distancia), Psi (Modulo de elasticidad) y Libras (Fuerzas)\n\n')
                g=386;
                switch n1
                    case 1 %Eje con diámetro constante
                        switch n2
```

Figura 45. Vista del programa desde el editor de MatLab

Los comandos que se pueden apreciar en la figura 45 son los siguientes:

- clc: Este comando sirve para limpiar la pantalla de Command Window.
- clear all: Sirve para borrar todas las variables existentes antes de comenzar con el programa.
- clear: También sirve para borrar las variables.
- fprintf: Este comando nos sirve para imprimir textos en la pantalla de Command Window, hay que decir que el texto escrito debe ir entre comillas simples, fprintf(‘ texto’).
- \t: La diagonal es una diagonal invertida no es la típica diagonal /, este comando sirve como tabulador, es decir nos va centrando en texto poco a poco, dependiendo de que tan centrado lo quiere será las veces que escriba \t.
- \n: Igual que lo anterior la diagonal es una diagonal invertida, este comando nos sirve para dejar un espacio entre cada línea del texto que aparecerá en el Command Window, cabe mencionar que este comando se debe poner al final cada que se use el comando fprintf ya que si no el texto que sigue después de usar fprintf aparecerá en el mismo renglón por eso es conveniente escribir: fprintf(‘texto…. \n’).

- input: este comando sirve para pedir al usuario que ingrese algún valor o texto.
- syms: Este comando sirve para declarar cuales letras o números o texto serán tomadas como variables.
- switch: Es una sentencia que se usa para crear una estructura de control como la que se muestra en la figura siguiente:

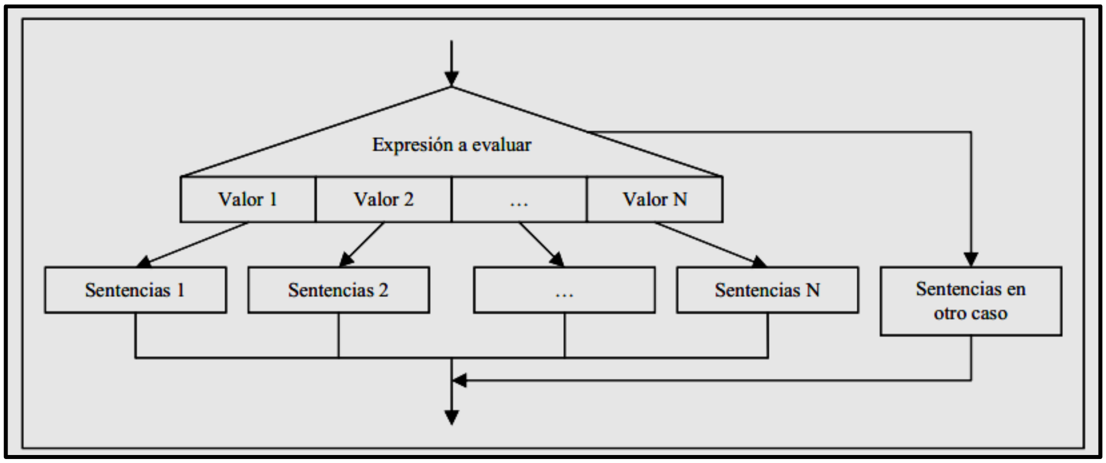


Figura 46. Estructura de la sentencia switch.

La estructura de esta sentencia es la siguiente:

```
switch <Expresión a evaluar>
   case <Valor 1>
      <Sentencias 1>
   case <Valor 2>
      <Sentencias 2>
   case <…>
      <…>
   case <Valor N>
      <Sentencias N>
   otherwise
      <Sentencias en otro caso>
end
```

Figura 47. Estructura de como aparece en MatLab

En la figura 48 se pueden ver más de los comandos que se utilizaron en este programa, y a continuación se dará una breve explicación para lo que sirven dichos comandos:

```
%REACCIONES EN LOS APOYOS
RA=inline(W+Q+P-W*((a+b+c)/L)-Q*((a+b)/L)-P*(a/L),'P','Q','W');RE=inline(W*((a+b+c)/L)+Q*((a+b)/L)+P*(a/L),'P','Q','W');
%MOMENTO FLECTOR DE CADA CORTE
M1=(W+Q+P-W*((a+b+c)/L)-Q*((a+b)/L)-P*(a/L))*x;
M2=(W+Q+P-W*((a+b+c)/L)-Q*((a+b)/L)-P*(a/L))*x-P*(x-a);
M3=(W+Q+P-W*((a+b+c)/L)-Q*((a+b)/L)-P*(a/L))*x-P*(x-a)-Q*(x-(a+b));
M4=(W+Q+P-W*((a+b+c)/L)-Q*((a+b)/L)-P*(a/L))*x-P*(x-a)-Q*(x-(a+b))-W*(x-(a+b+c));
%Derivadas parciales
D11=diff(M1,P);D12=diff(M2,P);D13=diff(M3,P);D14=diff(M4,P);
D21=diff(M1,Q);D22=diff(M2,Q);D23=diff(M3,Q);D24=diff(M4,Q);
D31=diff(M1,W);D32=diff(M2,W);D33=diff(M3,W);D34=diff(M4,W);
%DEFLEXION EN EL PUNTO "B":
%Primer corte
%Deflexion en B1
DeltaB1=int(M1*D11/(E*I),0,a);
%Segundo corte
% Deflexion en B2
DeltaB2=int(M2*D12/(E*I),a,a+b);
%Tercer corte
%Defelxion en B3
DeltaB3=int(M3*D13/(E*I),a+b,a+b+c);
%Cuarto corte
%Deflexion en B4
DeltaB4=int(M4*D14/(E*I),a+b+c,L);
%DEFLEXION EN EL PUNTO "C":
%Primer corte
%Deflexion en C1
```

Figura 48. Algunos comando usados

- %: Este signo nos sirve para indicar que algún texto o ecuación o número no forma parte de la programación y así a la hora de correr el programa no lo tome como línea a ejecutar y simplemente ignore dicha línea donde se encuentra el signo %texto, sino solo es para dar una breve explicación de lo que se esté realizando
- inline: Este comando sirve para convertir una expresión a una función que dependa de las variables que nosotros queramos, en la figura 48 se dice que RA será una función dependiente de las variables P, Q y W.
- diff: Este comando sirve para hacer la derivada de una función o expresión, en la figura 48 se observa que D11=diff(M1,P), esto quiere decir que D11 es la derivada de M1 con respecto de P.
- int: Este comando sirve para integrar una función o expresión, en la figura 48 se observa que DeltaB=int(M1*D11/(E*I),0,a), esto nos indica que DeltaB es la integral de la expresión M1*D11/(E*I) y que los límites son desde 0 hasta a.

En la figura 49 se muestran más de los comando utilizados en este programa y una pequeña explicación del funcionamiento de dichos comandos:

```
%Grafica
X=linspace(0,a+1,500);y=linspace(-d/2,d/2,500);x1=0;x2=a+1;y1=-d/2;y2=d/2;
plot(X,y1,'k.',X,y2,'k.',x1,y,'k.')
hold on;grid on
x6=linspace(a+1,a+b+1,500);x7=a+1;
plot(x6,y1,'k.',x6,y2,'k.')
x11=linspace(a+b+1,a+b+c+1,500);x12=a+b+1;x13=a+b+c+1;
plot(x11,y1,'k.',x11,y2,'k.')
x17=linspace(a+b+c+1,L,500);x18=a+b+c+1;x19=L;
plot(x17,y1,'k.',x17,y2,'k.',x19,y,'k.')
x3=linspace(a-1,a+1,500);y3=linspace (-d/2-2,d/2+2,500);x4=a-1;x5=a+1;y4=-d/2-2;y5=d/2+2;
plot(x3,y4,'r.',x3,y5,'r.',x4,y3,'r.',x5,y3,'r.')
x8=linspace(a+b-1,a+b+1,500);x9=a+b-1;x10=a+b+1;
plot(x8,y4,'r.',x8,y5,'r.',x9,y3,'r.',x10,y3,'r.')
x14=linspace(a+b+c-1,a+b+c+1,500);x15=a+b+c-1;x16=a+b+c+1;
plot(x14,y4,'r.',x14,y5,'r.',x15,y3,'r.',x16,y3,'r.')
axis([-5 (L+5)  -(d/2+4) (d/2+4)])
%Fuerzas que estan en el eje
fprintf('\n');
fprintf('\tFavor de ingresar las fuerzas');
fprintf('\n\n');
P=input('Pimera fuerza: ');Q=input('Segunda fuerza: ');W=input('Tercera fuerza: ');
%Resultados
Reaccion_en_el_primer_apoyo=feval(RA,P,Q,W);
Reaccion_en_el_segundo_apoyo=feval(RE,P,Q,W);
deflexionB=feval(DeltaaB,P,Q,W);
deflexionC=feval(DeltaaC,P,Q,W);
deflexionD=feval(DeltaaD,P,Q,W);
```

Figura 49. Más de los comando usados

- feval: este comando sirve para evaluar una función, en la figura 49 se observa que: Reaccion_en_el_primer_apoyo=feval(RA,P,Q,W) nos dice que evalué la función RA con los valores de P, Q y W y que dicho resultado será Reaccion_en_el_primer_apoyo.
- linpace: Este comando sirve para decir que trace una línea recta desde un punto determinado hasta otro punto, en la figura 49 se puede apreciar que dice X=linspace(0,a+1,500), esto nos indica que se trazará una recta desde 0 hasta a+1 y que dicha recta esta dividida en 500 partes.
- axis: Este comando sirve para determinar hasta que valores se quiere que tomen los ejes coordenados, este comando debe ir después de usar el comando “plot”.
- hold on: Sirve para que todos las graficas aparescan en una sola figura.
- grid on: Sirve para hacer un enmallado en el plano coordenado.

- plot: Este comando sirve para graficar, en la figura 49 se puede ver claramente que dice: plot(X,y1,'k.',X,y2,'k.',x1,y,'k.'), acá se quiere decir que se graficará el valor de X y el y1, dándole el color negro a cada parte a la que se ha dividido a la recta de linspace, es por eso que se le pone 'k.' el punto que lleva nos indica que le dará color a cada parte de dicha recta que se gráfica, para este caso graficará una línea horizontal que tendrá las coordenadas (0,y1) y (a+1,y1), el siguiente que es (X,y2,'k.') nos dice que hará una línea horizontal de color negro con las coordenadas (0,y2) y (a+1,y2) y por último se tiene la expresión (x1,y,'k.') la cual trazará una línea horizontal de color negro que tendrá las coordenadas (0,-d/2) y (0,d/2).

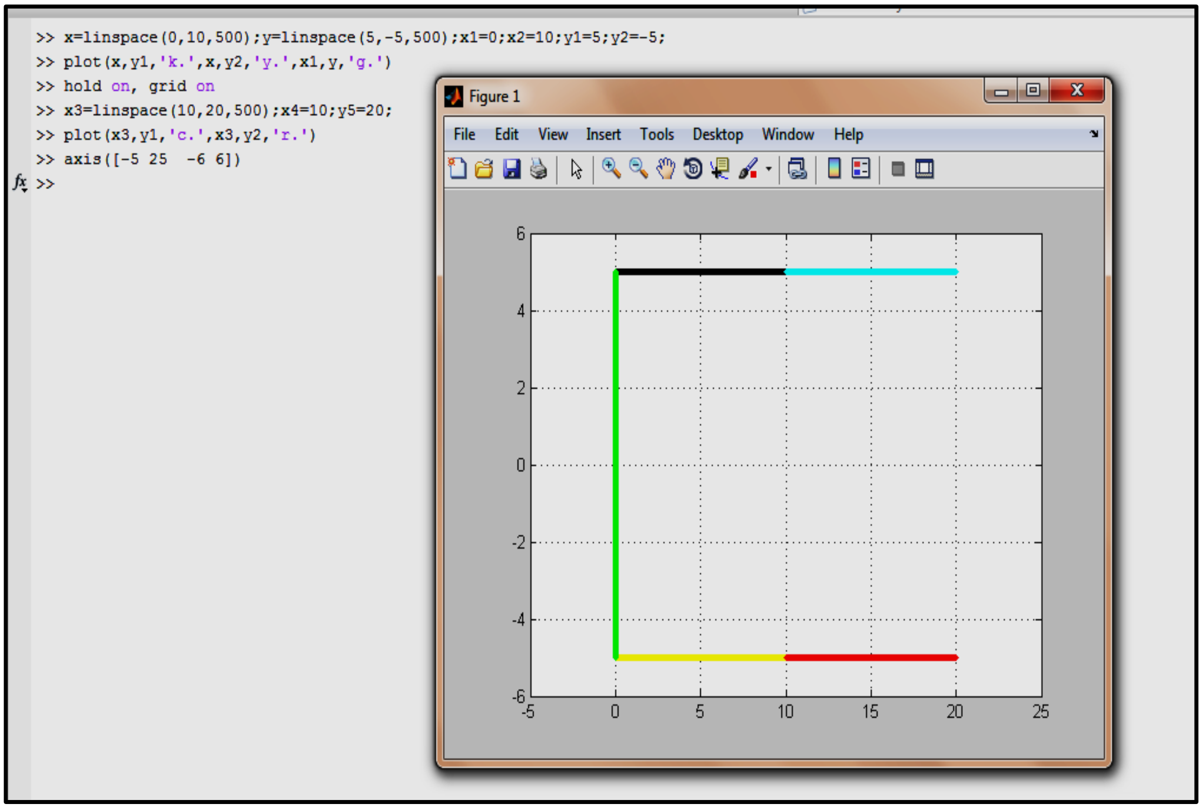


Figura 50. Ejemplo de como usar plot.

En la figura 50 se puede ver claramente el uso de los comandos linspace, plot, grid on, hold on y axis, los colores que deseemos que contengan las gráficas debe ir siempre entre comillas simples 'color'.

Los comandos antes mencionados son todos los que se utilizaron durante el diseño de este programa, solo que en expresiones diferentes.

CONCLUSIONES

Este proyecto cumplió con las expectativas requeridas, y es seguro que este software será de útil ayuda para complementar los trabajos que a diario realiza un Ing. Mecánico.

El facilitar el resultado de los cálculos requeridos en materias como diseño es un gran paso para reafirmar nuestras dudas.

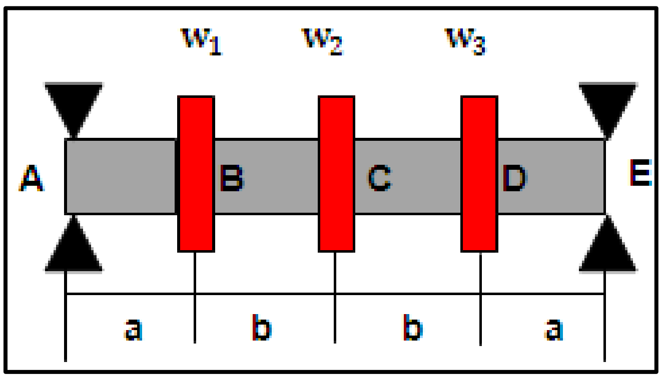
Para que este proyecto fuera completo, en el aspecto de que pueda calcular la primera velocidad crítica se hicieron algunas modificaciones ya que la ecuación que obtuvimos no satisfacía todas las necesidades, pero con unos cuantos arreglos el programa quedó apto para la necesidad del estudiante, además es muy fácil de usar, con esto todos los estudiantes se pueden ahorrar mucho tiempo en el cálculo de la primera velocidad crítica o en encontrar el diámetro de un eje.

ANEXOS

Validación del programa

Validación del programa con ejercicios proporcionados por nuestro asesor M. C. Ignacio Arrioja Cárdenas:

1.- Un eje con diámetro uniforme d=5 in tiene una longitud de L=56 in entre cojinetes, módulo elástico E=30 Mpsi y tiene tres masas cuyos pesos se indican en la figura. Despreciando el peso del eje. Aplicando la ecuación de Rayleigh-Ritz, encuentre:



a) la primera velocidad crítica del eje con los siguientes valores:

a=10 in

b=18 in

W1=600 lb

W2= 1000 lb

b) si todas las longitudes se reducen a la mitad, calcule la primera velocidad crítica correspondiente.

El resultado que nos proporcionó nuestro asesor M. C. Ignacio Arrioja Cárdenas es de:

$$a)\omega_1 = 2590\ rpm$$
$$b)\omega_1 = 7325.4\ rpm$$

Ahora se verá los resultados obtenidos con el programa realizado:

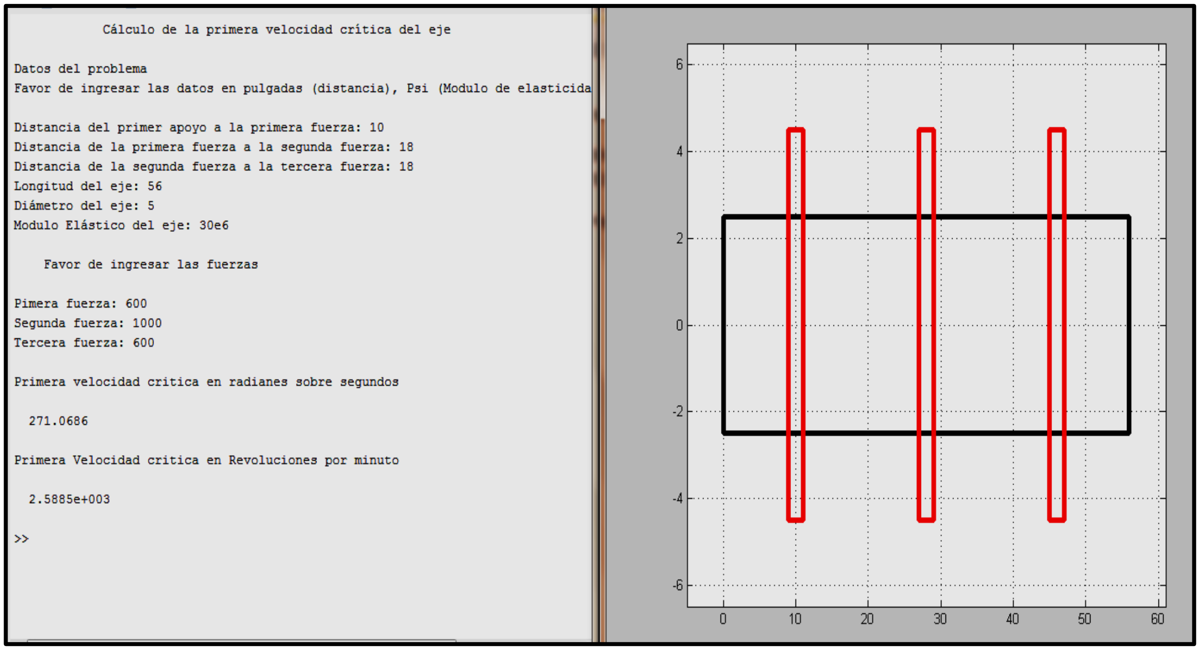


Figura 51. Resultado del ejemplo 1 inciso a).

Como se puede observar en la figura 51 el resultado para el inciso a es de 2588.5 rpm.

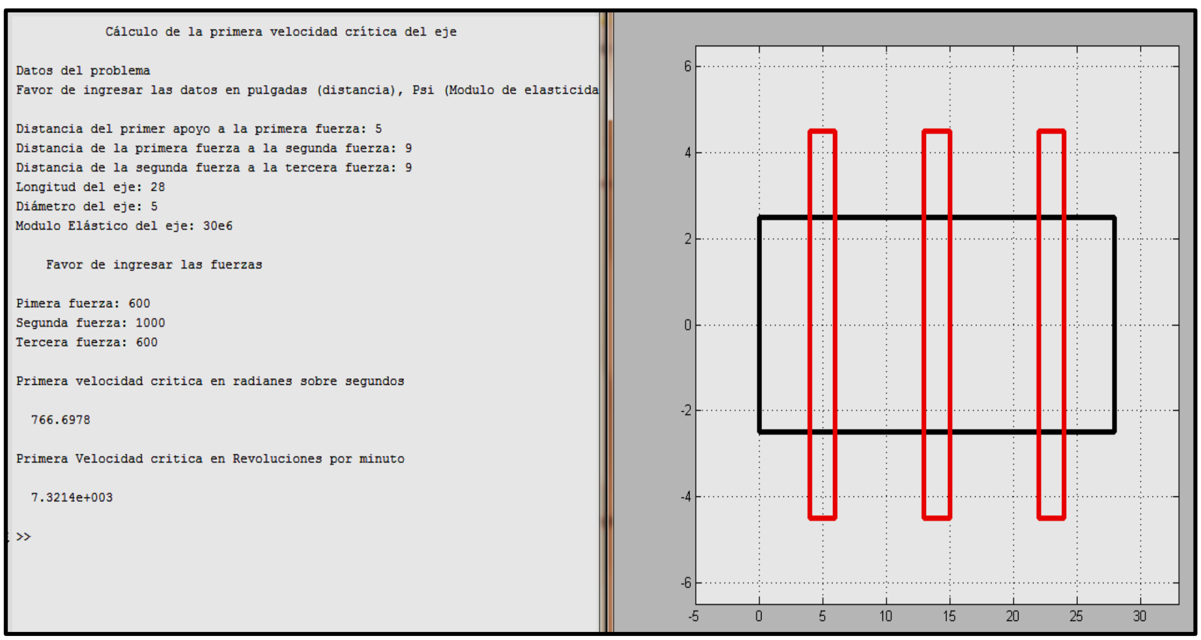
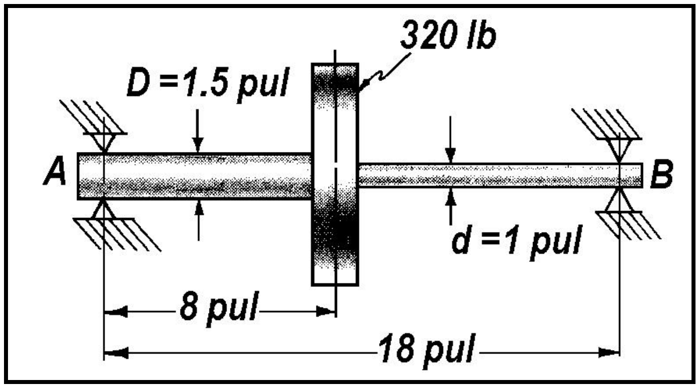


Figura 52. Resultado del ejemplo 1 inciso b).

Como se puede observar en la figura 52 el resultado para el inciso b es de 7321.4 rpm.

2.- Determinar la velocidad crítica del eje de acero que se muestra en la siguiente figura. (E = 30x10^6 psi)

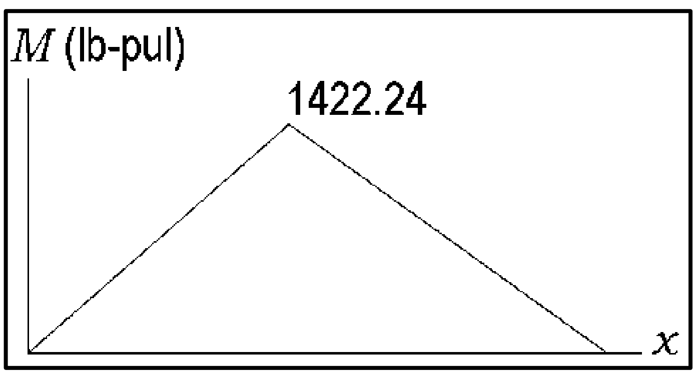


Solución:

Equilibrio del eje:

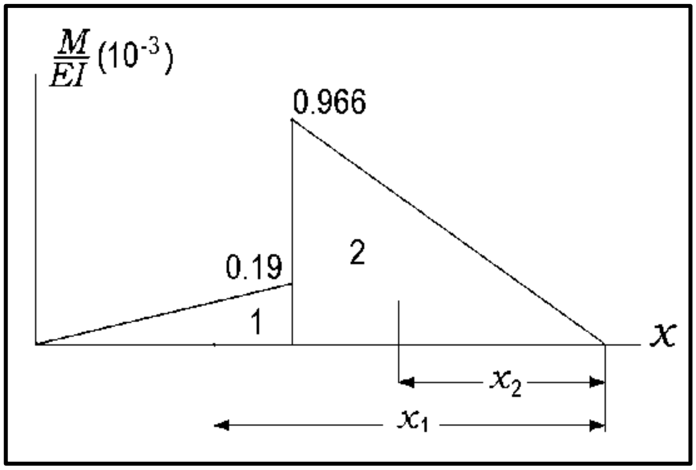
$$\sum M_A = 0 \therefore 18R_B - 320(8) = 0 \therefore R_B = 142.22 \text{ lb}, \qquad R_A = 177.78 \text{ lb}.$$

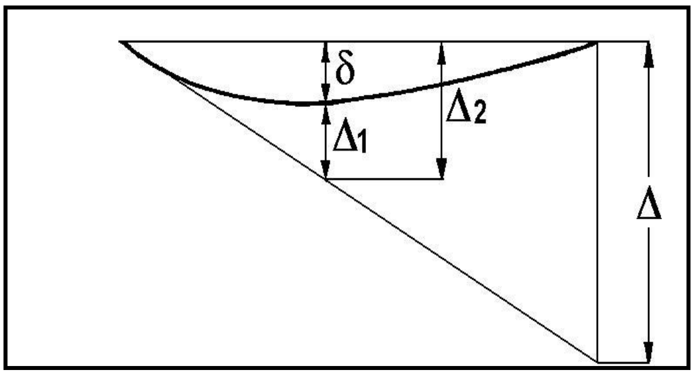
Diagrama de momentos:



$EI_1 = 7.455 \times 10^6$

$EI_2 = 1.4726 \times 10^6$





$$A_1 = \frac{8 \times 0.19 \times 10^{-3}}{2} = 0.76 \times 10^{-3}$$

$$A_2 = \frac{10 \times 0.996 \times 10^{-3}}{2} = 4.98 \times 10^{-3}$$

$$x_1 = 10 + \frac{8}{3} = \frac{38}{3} \text{ pul}$$

$$x_2 = 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \text{ pul}$$

$$\Delta = A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0.76 \times 10^{-3} \times \frac{38}{3} + 4.98 \times 10^{-3} \times \frac{20}{3} = 42.8267 \times 10^{-3} \text{ pul}$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{8}{18}\right) \times \Delta = \frac{8 \times 42.8267 \times 10^{-3}}{18} = 19.034 \times 10^{-3} \text{ pul}$$

$$\Delta_1 = A_1 \times \left(\frac{8}{3}\right) = 0.76 \times 10^{-3} \times \frac{8}{3} = 2.02667 \times 10^{-3} \text{ pul}$$

$\delta = \Delta_2 - \Delta_1 = (19.034 - 2.02667) \times 10^{-3} = 17 \times 10^{-3}$ pul

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{386}{17 \times 1010^{-3}}} = 150.684\,{}^{\text{rad}}/_{\text{seg}} \therefore \boxed{n_c = 1440 \text{ rpm}}$$

Ahora se verá el resultado obtenido con el programa:

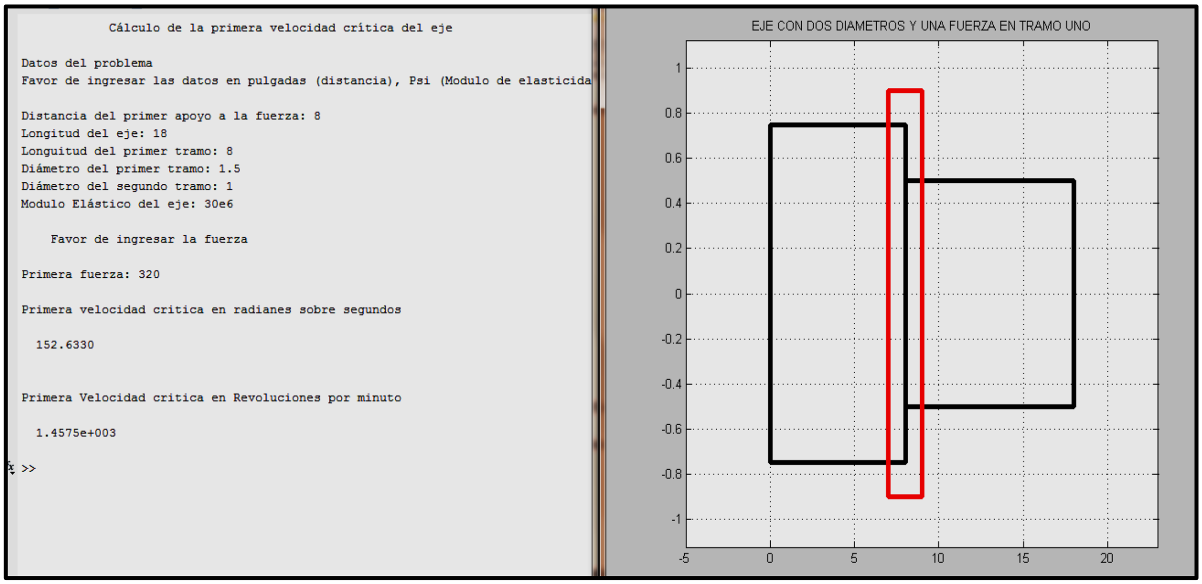
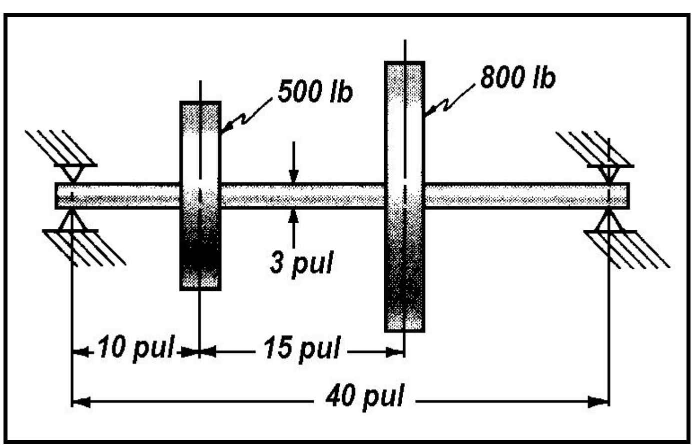


Figura 53. Resultado del ejemplo 2

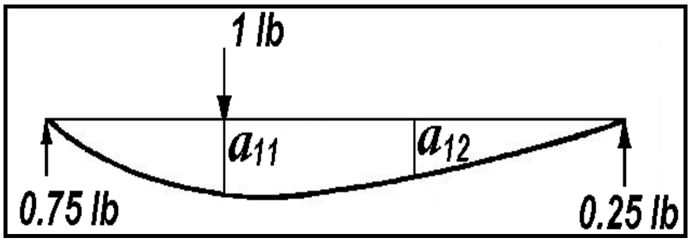
Como se puede observar en la figura 53 nos da un resultado de 152.633 rad/seg o de 1457.5 rpm.

3.- Para el eje que se muestra en la figura, determinar: a) La primera velocidad crítica aplicando la fórmula de Rayleigh- Ritz (E = 30x10^6 psi).



De acuerdo con la figura tenemos lo siguiente: $EI = 119.28$ lb.pul^2

Primera condición



$EIy" = 0.75x - (x-10) \therefore$

$EIy' = 0.375x^2 - \frac{1}{2}(x-10)^2 + C_1$

$EIy = 0.125x^3 - \frac{1}{6}(x-10)^3 + C_1 x + C_2$

$y(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

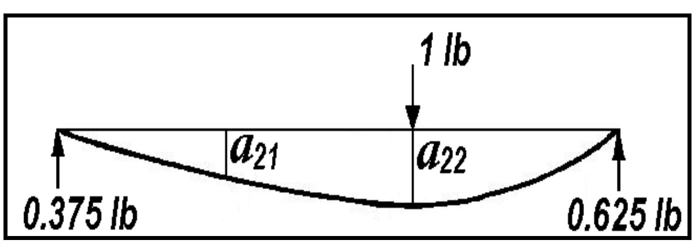
$y(40) = 0 \rightarrow C_1 = -87.5 \therefore$

$y = \frac{10^6}{119.28}\left[0.125x^3 - \frac{1}{6}(x-10)^3 - 87.5x\right]$

$a_{11} = 6.2877 \times 10^6$ pul

$a_{12} = 6.68 \times 10^6$ pul

Segunda condición:



$EIy" = 0.375x - (x-25) \therefore$

$EIy' = 0.1875x^2 - \frac{1}{2}(x-25)^2 + C_1$

$$EIy = 0.0625x^3 - \frac{1}{6}(x-25)^3 + C_1x + C_2$$

$$y(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$y(40) = 0 \rightarrow C_1 = -85.9375 \therefore$$

$$y = \frac{10^6}{119.28}\left[0.0625x^3 - \frac{1}{6}(x-25)^3 - 85.9375x\right]$$

$$a_{21} = 6.68 \times 10^6 \text{ pul}$$

$$a_{22} = 9.8248 \times 10^6 \text{ pul}$$

Solución (a):

$$\delta_1 = W_1a_{11} + W_2a_{12} = (500 \times 6.2877 + 800 \times 6.68) \times 10^6 = 0.008488 \text{ pul}$$

$$\delta_2 = W_1a_{21} + W_2a_{22} = (500 \times 6.68 + 800 \times 9.8248) \times 10^6 = 0.0112 \text{ pul}$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g\sum_{k=1}^{n} W_k\delta_k}{\sum_{k=1}^{n} W_k\delta_k^2}} = \sqrt{\frac{386(500 \times 0.008488 + 800 \times 0.0112)}{500(0.0084880)^2 + 800(0.0112)^2}} = 193.32 \ {}^{\text{rad}}/_{\text{seg}}$$

$$\therefore \boxed{n_c = 1846 \text{ rpm}}$$

Ahora se verá el resultado obtenido con el programa:

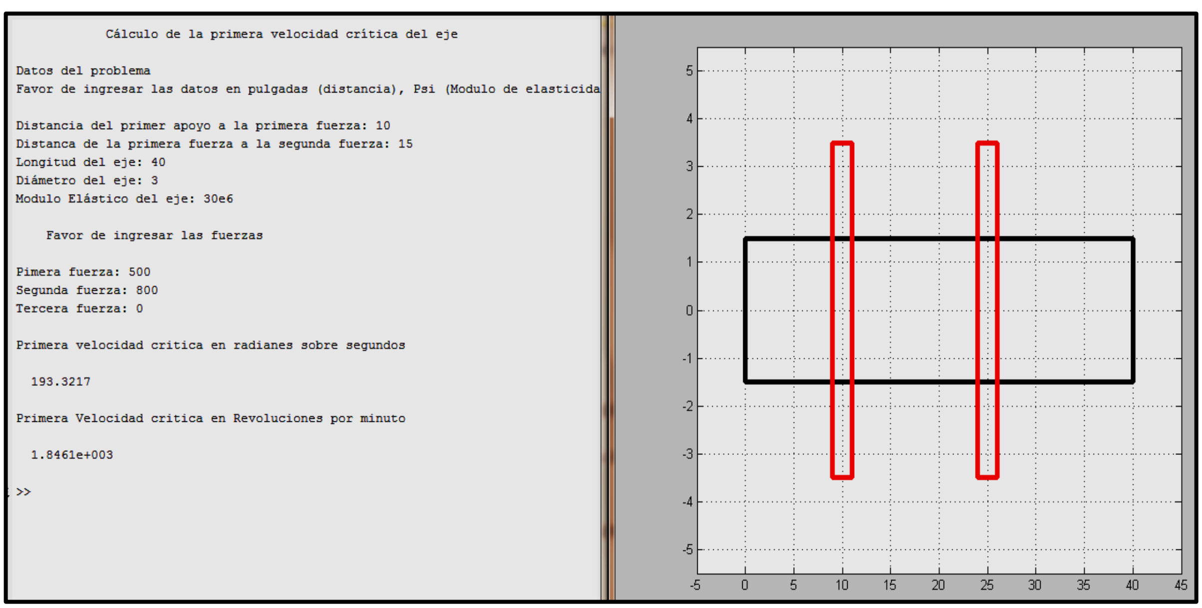


Figura 54.Resultado del ejemplo 3.

Como se puede observar en la figura 54 la primera velocidad critica nos da 193.3217 rad/seg o 1846.1 rpm.

Ahora se comprobará con otro ejercicio:

4-. Para el eje escalonado de la figura, sometido a una carga puntual de F= 8kN, determinar la velocidad critica, considerar el módulo elasticidad, E= 210000N/mm^2.

Solución:

Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum Fv = 0$$

$$R_A + R_B = 8 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A * 425 - 8000 * 185 = 0$$

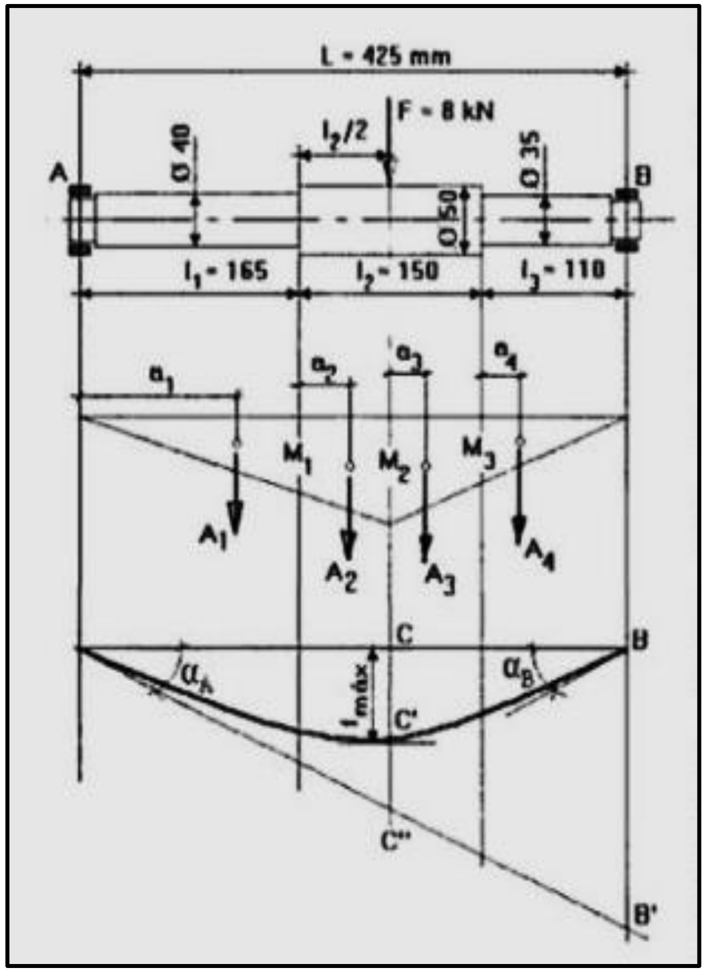
$$R_A = 3482.35 \text{ N}; \quad R_B = 4517.65 \text{ N}$$

Calculamos los valores de los momentos flectores:

$$M_1 = 574\,587 \text{ Nmm}$$

$$M_2 = 835\,764 \text{ Nmm}$$

$$M_3 = 496\,940 \text{ Nmm}$$



Dividimos el diagrama de momentos flectores en cuatro áreas cuyos valores indicamos en la tabla siguiente, junto con los momentos de inercia de las secciones correspondientes y las distancias al extremo izquierdo de cada área considerada:

Tramo	Distancia mm	Diámetro del eje en mm	Momento flector en Nmm	Momento de inercia en mm^4	Cociente M/I en N/mm^3	Área del diagrama en N/mm^2
1	$a_1 = 110$	$d_1 = 40$	574 587	$I_1 = 125\,663$	4.572	$A_1 = 377.19$
		$d_2 = 50$		$I_2 = 306\,796$	1.872	
2	$a_1 = 39.8$	$d_2 = 50$	835 764	$I_2 = 306\,796$	2.72	$A_2 = 172.2$
3	$a_1 = 34.3$	$d_2 = 50$	496 940	$I_2 = 306\,796$	1.62	$A_3 = 162.75$
	$a_1 = 36.7$	$d_3 = 35$		$I_3 = 73\,661$	6.74	$A_4 = 370.7$

Aplicando el método del área calculamos en primer lugar la distancia $\overline{BB'}$,

$$E * I * \overline{BB'} = A_1 * 315 + A_2 * 220.2 + A_3 * 150.7 + A_4 * 73.3 \ \therefore$$

$$\overline{BB'} = \frac{208432}{210000} = 0.992 \text{ mm}$$

Igualmente procedemos al cálculo de $\overline{CC'}$

$$E * I * \overline{CC'} = A_1 * 130 + A_2 * 35.2 \therefore$$

$$\overline{CC'} = \frac{55096.1}{210000} = 0.262 \text{ mm}$$

Por semejanzas de triángulos obtenemos ahora la distancia $\overline{CC''}$

$$\frac{\overline{CC''}}{240} = \frac{\overline{BB'}}{425}$$

De donde $\overline{CC''} = 0.560 \text{ mm}$

Finalmente procedemos al cálculo de la flecha en *C*:

$$\overline{CC'} = 0.560 - 0.262 = 0.298 \text{ mm}$$

El ángulo girado en el apoyo *A* se obtiene de:

$$\tan \alpha_a = \frac{0.992}{425} = 0.0023; \ \tan \alpha_a = 7°54"$$

Podemos por último estimar la velocidad crítica:

$$n_c = 300 * \sqrt{\frac{1}{f_{cm}}} = 300 * \sqrt{\frac{1}{0.0298}} = 1737 \text{ rpm}$$

Ahora se verá el resultado con el programa:

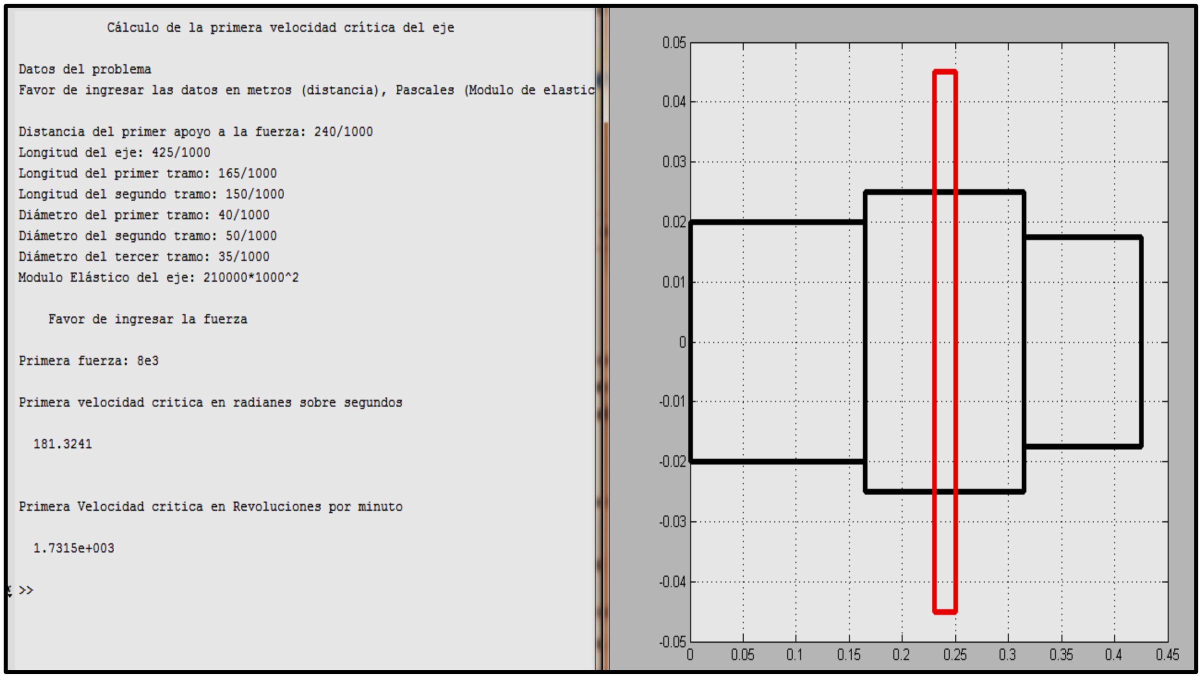


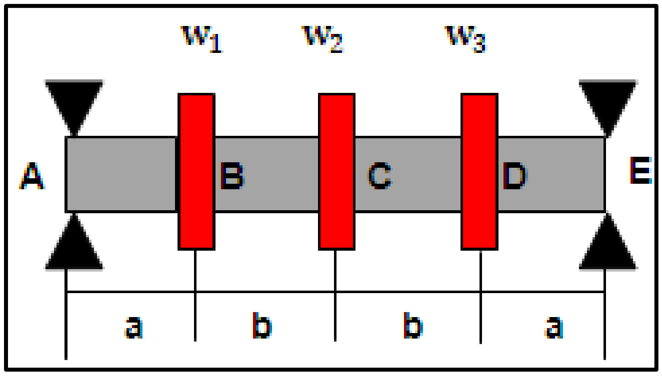
Figura 55. Resultado del ejemplo 4.

Como se apreció en la figura 55 la velocidad crítica nos da 1731.5 rpm.

Como se observó en los ejemplos que nos proporcionaron, los resultados con respecto a los resultados obtenidos mediante el programa varían muy poco y esto se puede deber al método que se usó para encontrar las deflexiones, ya que el programa calcula las deflexiones con el teorema de Castigliano.

Ahora se procederá a validar la otra parte del programa que es el cálculo del diámetro del eje, para validar esto se usarán dos problemas que nos sirvió para validar la primera parte del programa:

1.- Un eje tiene una longitud de L=56 in entre cojinetes, módulo elástico E=30 Mpsi y tiene tres masas cuyos pesos se indican en la figura. Despreciando el peso del eje. Aplicando la ecuación de Rayleigh-Ritz, encuentre:



La primera velocidad crítica del eje es 2590 rpm, encontrar el diámetro del eje con los siguientes valores:

a=10 in

b=18 in

W1=600 lb

W2= 1000 lb

Como este ejemplo ya se usó, se sabe que el diámetro del eje es de 5 in, a continuación se calculará con el programa:

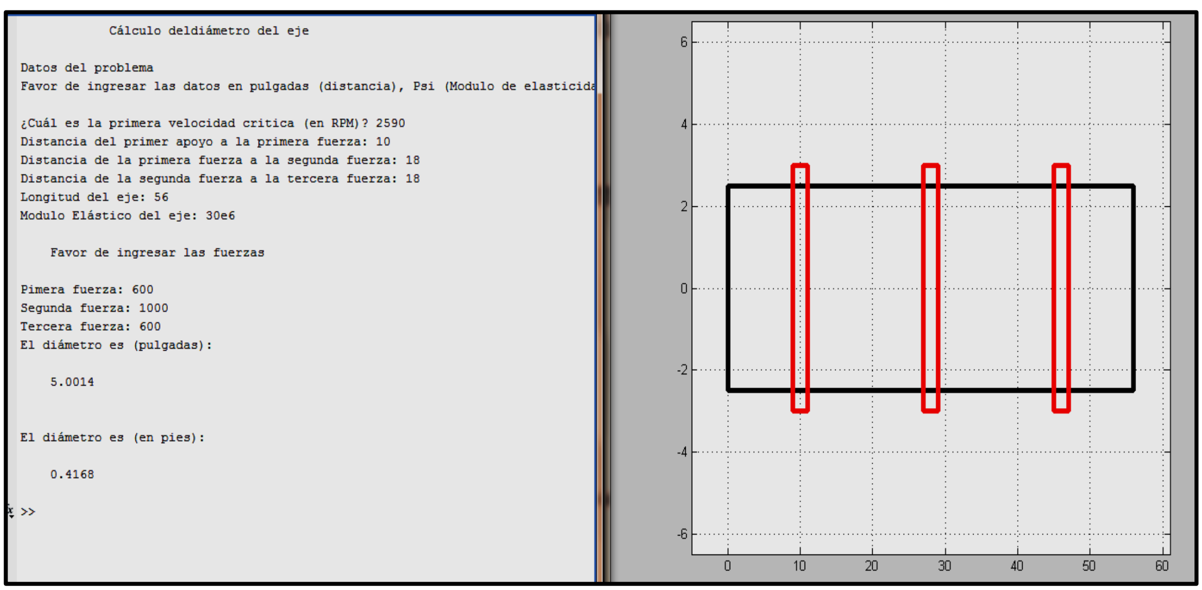
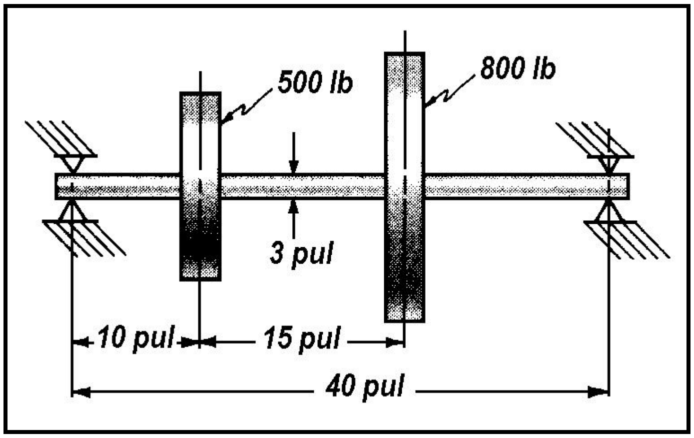


Figura 56. Resultado del problema 1

El diámetro usando el programa nos da que es de 5.0014 pulgadas.

2.- Este ejemplo también ya lo se ha visto anteriormente, pero ahora nos servirá para encontrar el diámetro del eje, como ya sabemos su velocidad crítica para este eje fue de 1846 rpm.



Ahora se verá el resultado que nos da el programa:

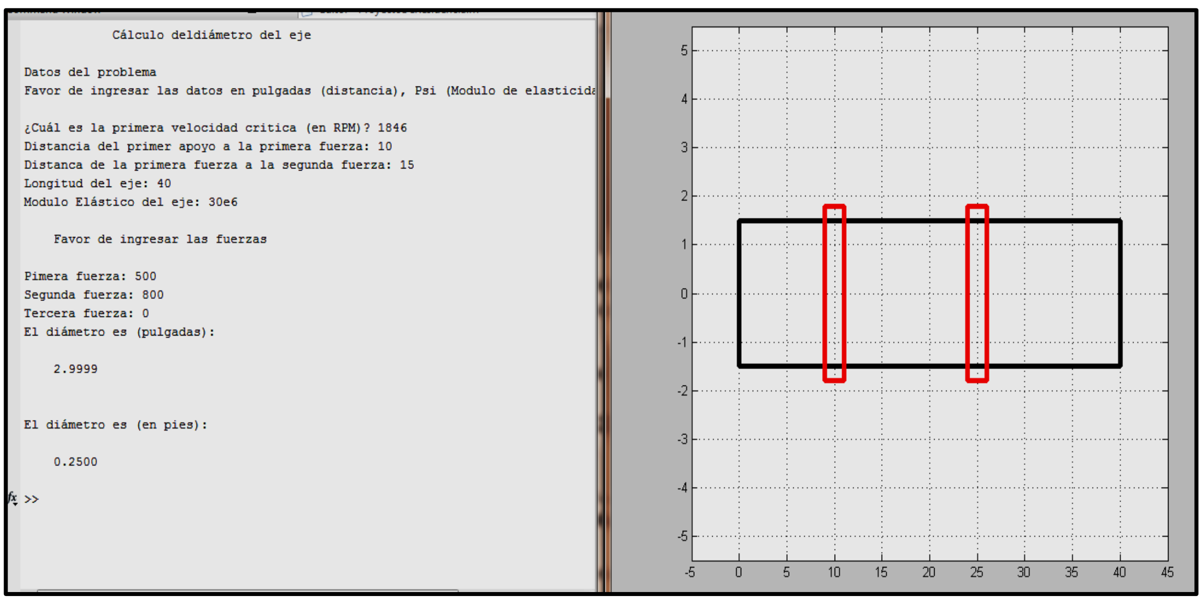


Figura 57. Resultado del problema 2.

El diámetro usando el programa nos da que es de 2.9999 pulgadas.

Como ya se había mencionado anteriormente estas pequeñas diferencias se puede deber al método usado para encontrar las deflexiones en cada punto.

Verificación del programa

Para finalizar se demostrará que el programa puede realizar el cálculo para cualquier tipo de combinación que existente desde que el eje tenga una fuerza con diámetro constante hasta que tenga tres fuerzas con tres diámetros diferentes, además se podrá observar que dependiendo de cuantas fuerzas y cuantos diámetros tenga el eje, la gráfica en la parte superior tendrá como título con cuantas fuerzas y cuantos diámetros esta conformado el eje, por ejemplo: Eje con dos diámetros y dos fuerzas en tramo uno, a continuación se presenta todas las combinaciones posibles:

Eje con diámetro contante:

Sistema ingles

Una fuerza

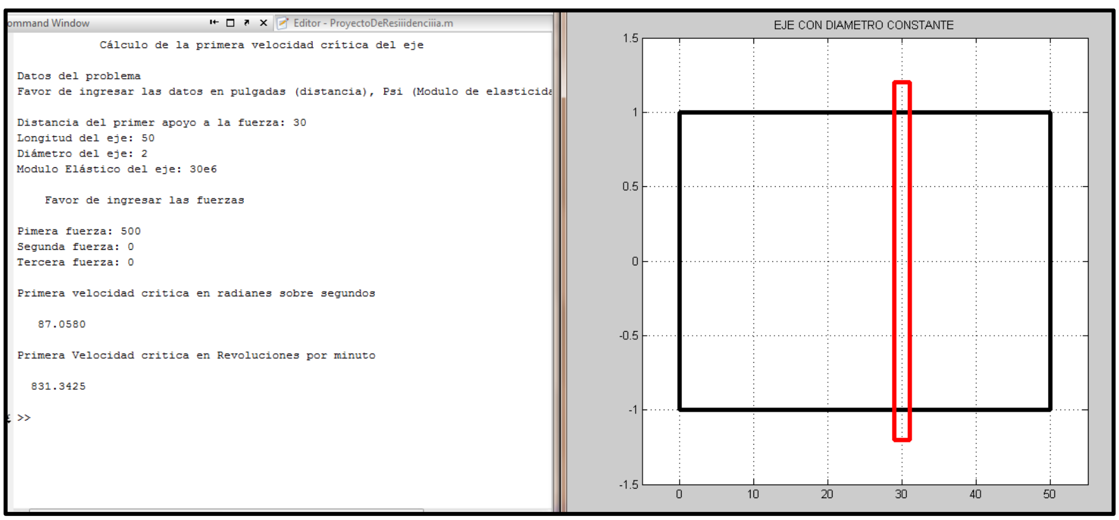


Figura 58. Eje con una fuerza

Dos fuerza

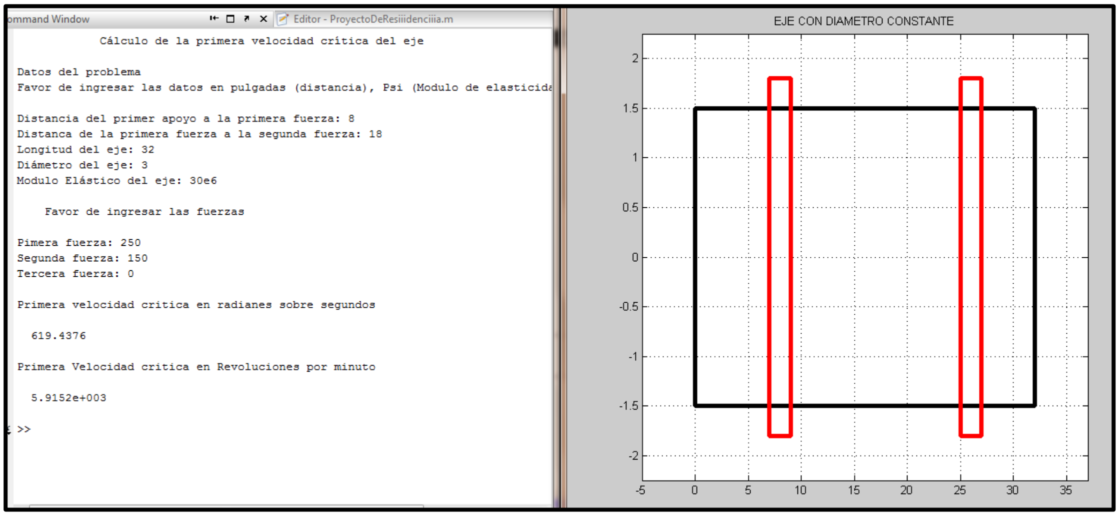


Figura 59. Eje con dos fuerzas

Tres fuerzas

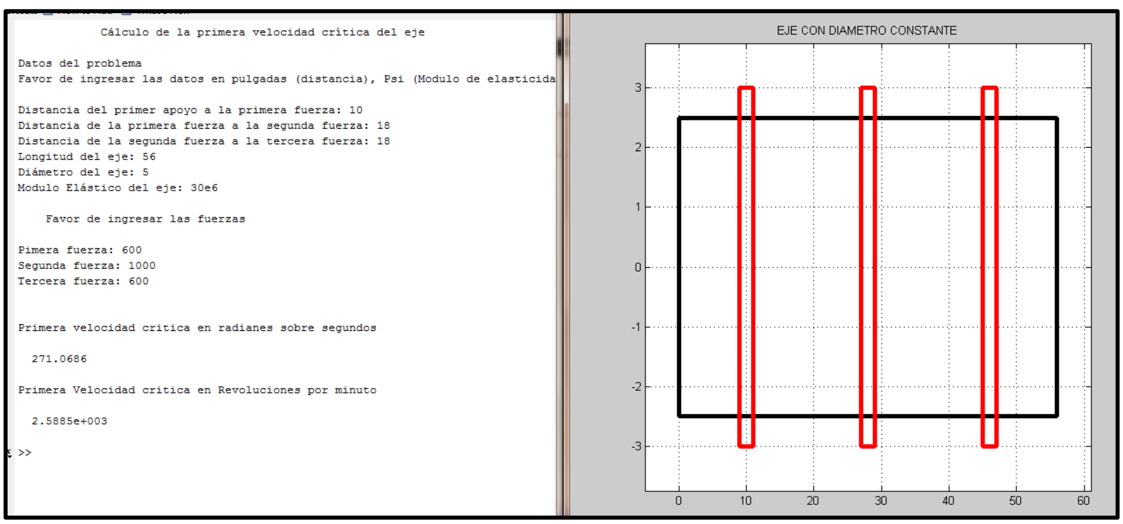


Figura 60. Eje con tres fuerzas

Sistema internacional

Una fuerza

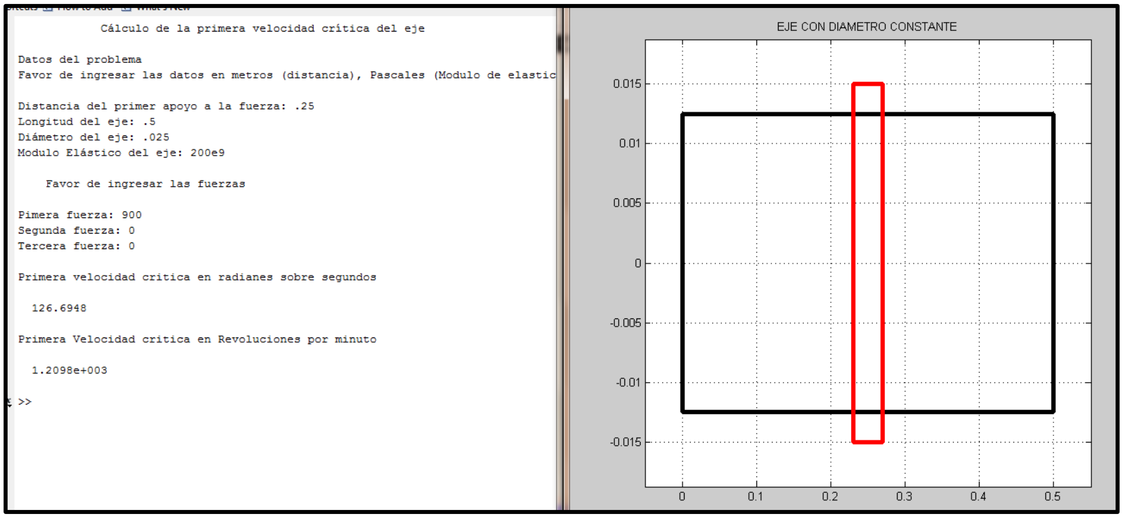


Figura 61. Eje con una fuerza

Dos fuerza

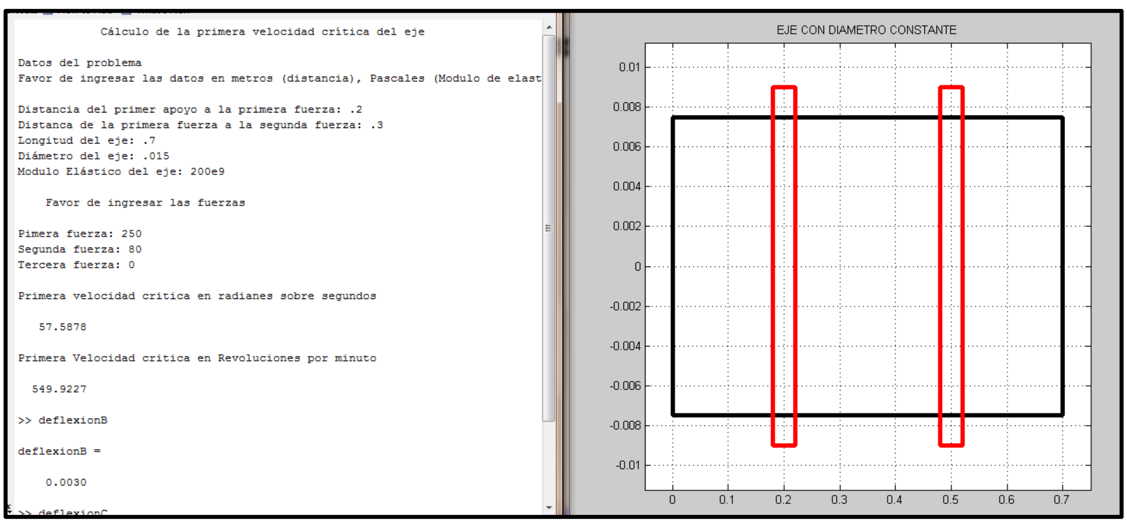


Figura 62. Eje con dos fuerzas

Tres fuerzas

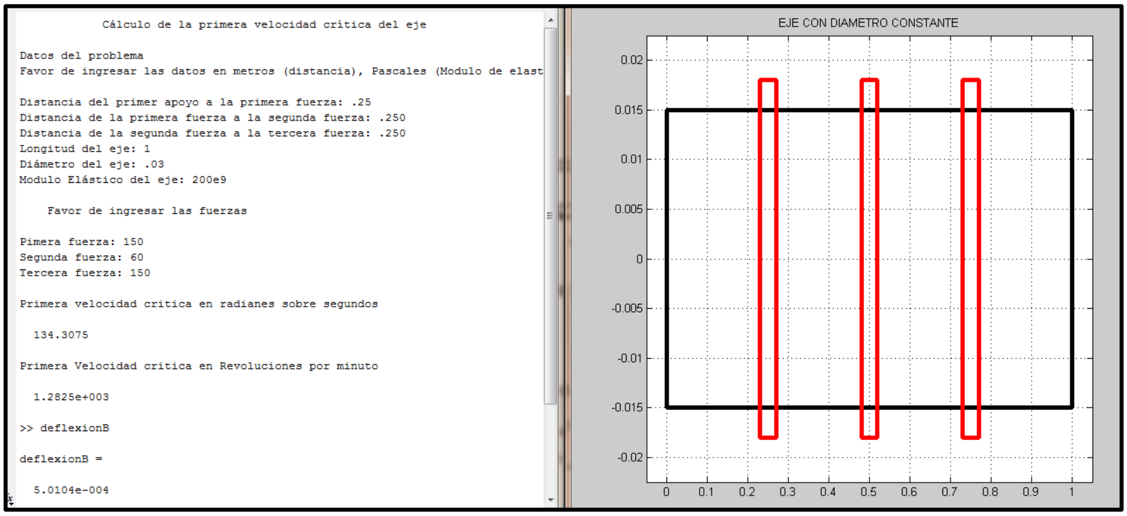


Figura 63. Eje con tres fuerzas

Eje con dos diámetros:

Sistema ingles

Una fuerza

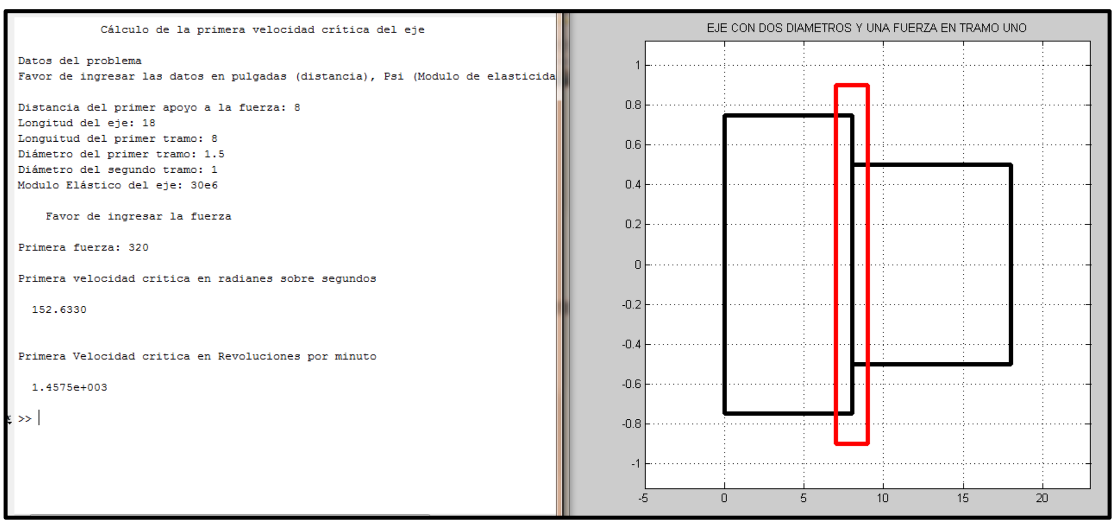


Figura 64. Eje con una fuerza en tramo uno

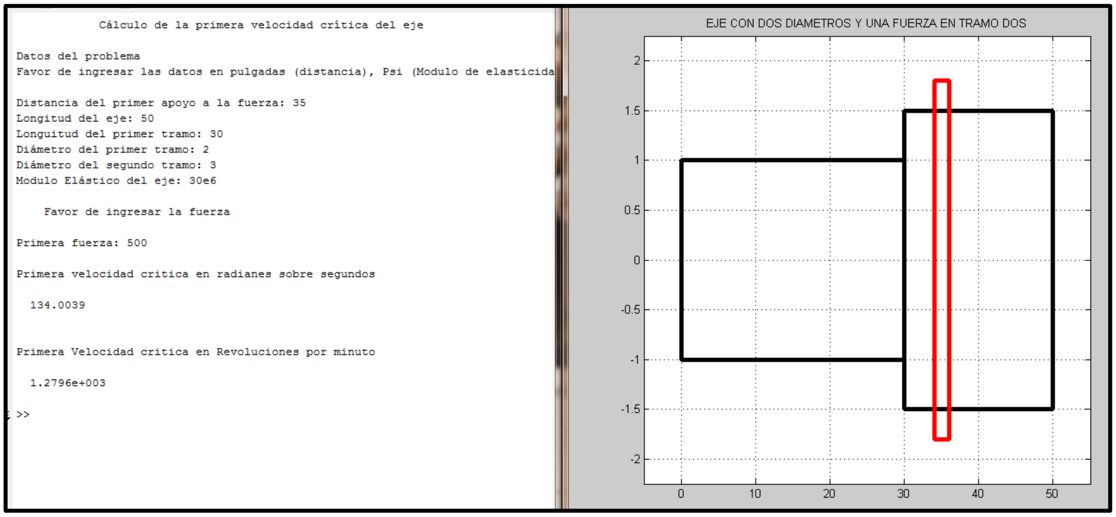


Figura 65. Eje con una fuerza en tramo dos

Dos fuerza

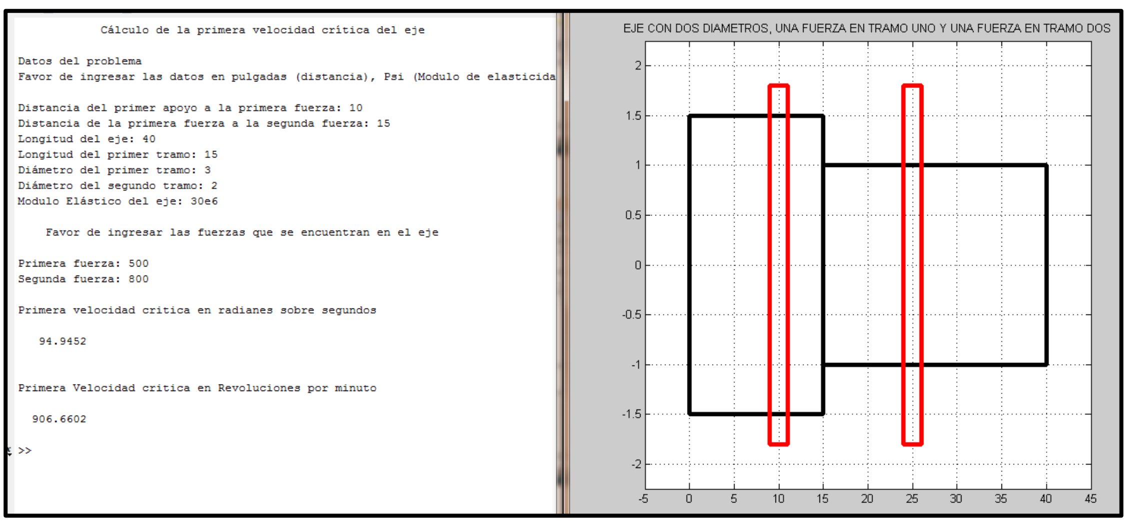


Figura 66. Eje con una fuerza en tramo uno y una fuerza en tramo dos

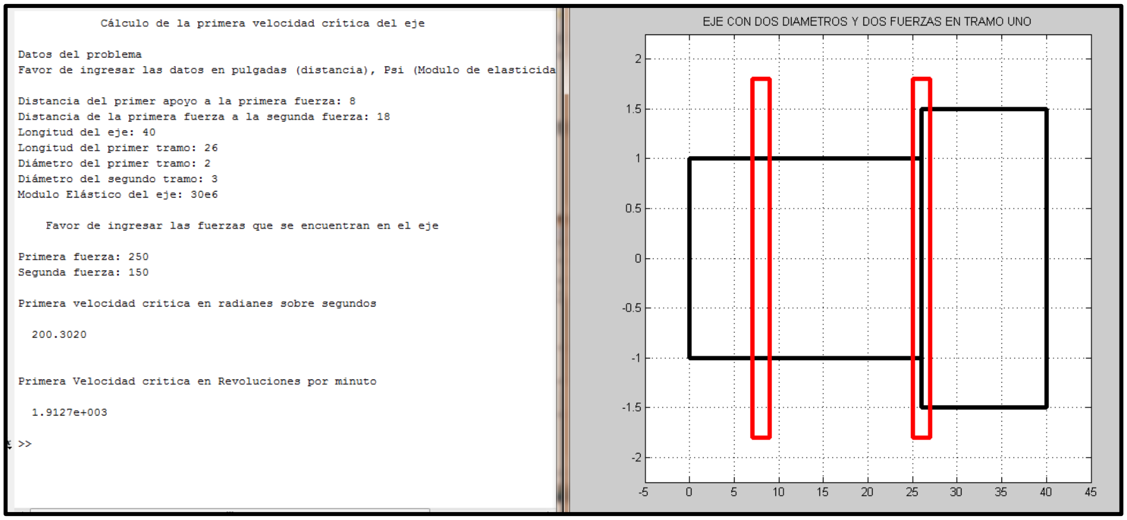


Figura 67. Eje con dos fuerzas en tramo uno

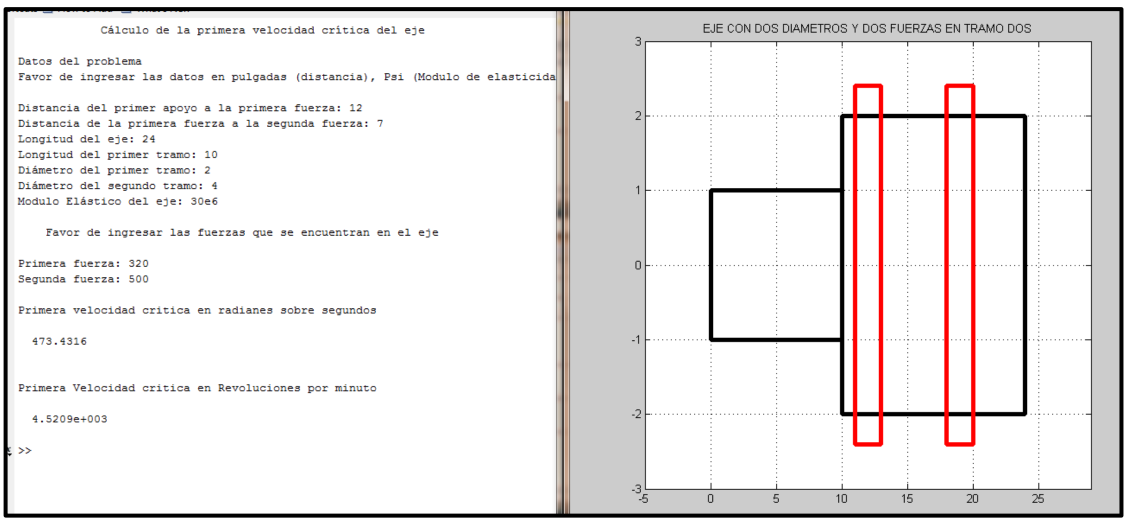


Figura 68. Eje con dos fuerzas en tramo dos

Tres fuerzas

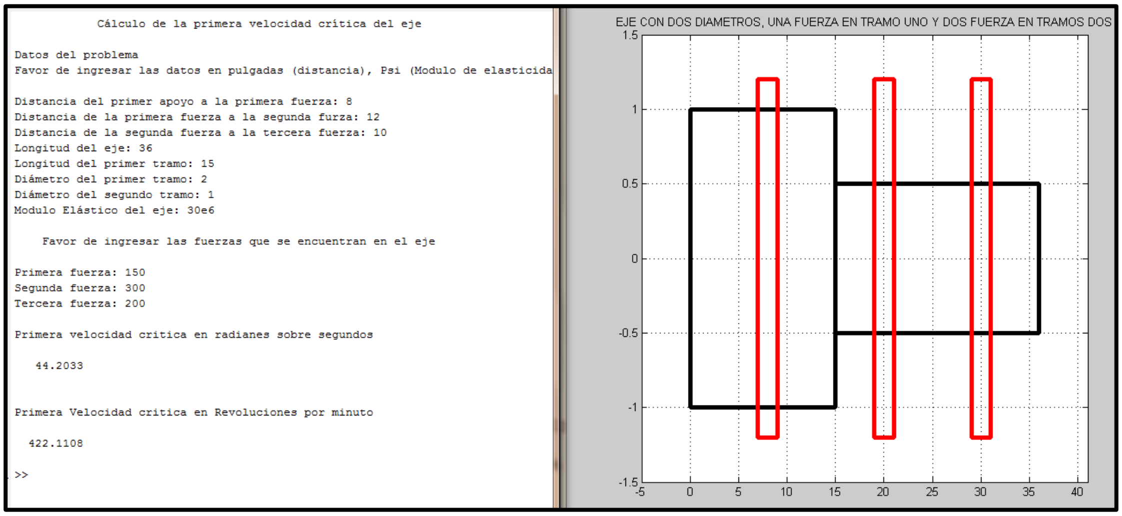


Figura 69. Eje con una fuerza en tramo uno y dos fuerzas en tramo dos

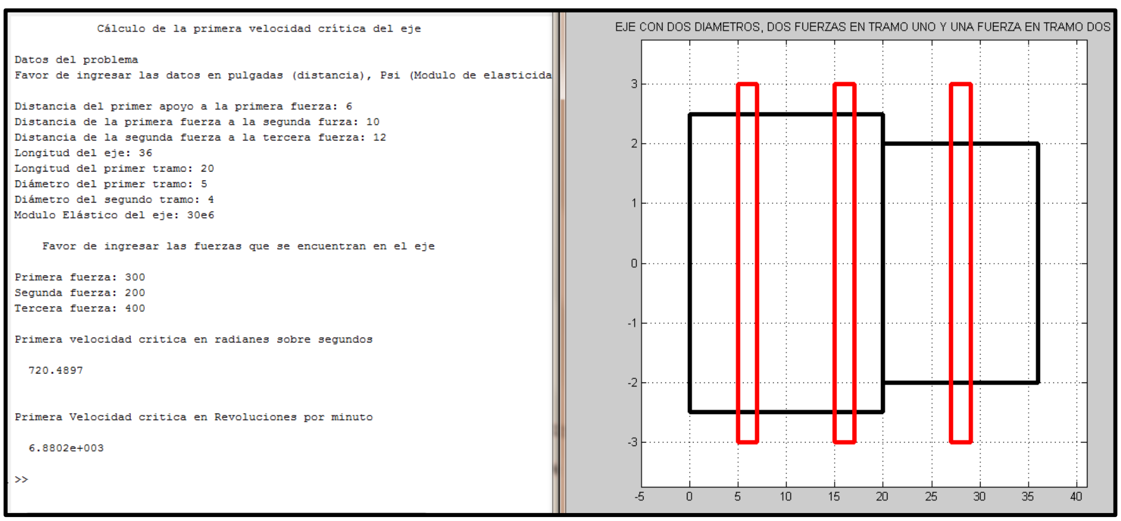


Figura 70. Eje con dos fuerzas en tramo uno y una fuerza en tramo dos

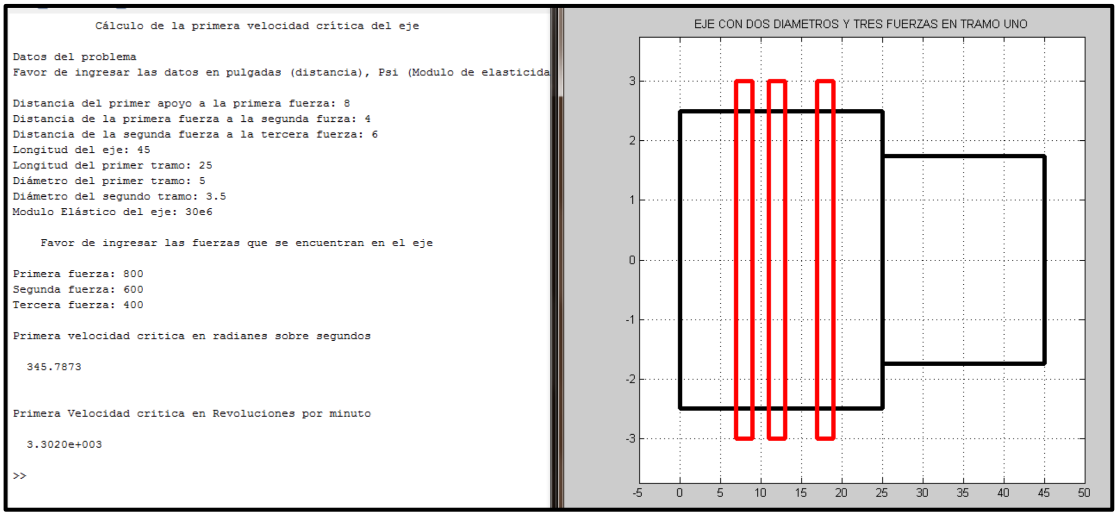


Figura 71. Eje con tres fuerzas en tramo uno

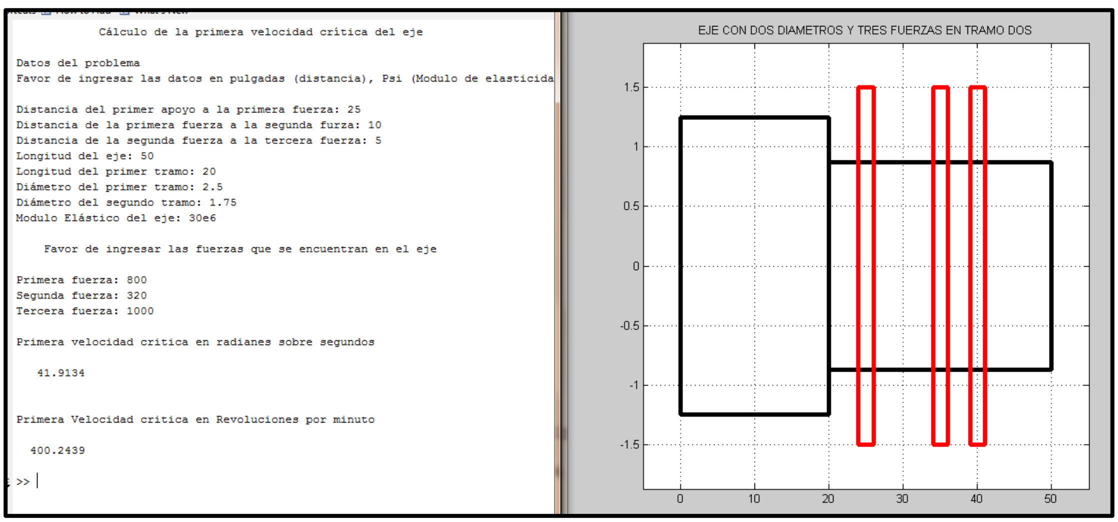


Figura 72. Eje con tres fuerzas en tramo dos

Sistema internacional

Una fuerza

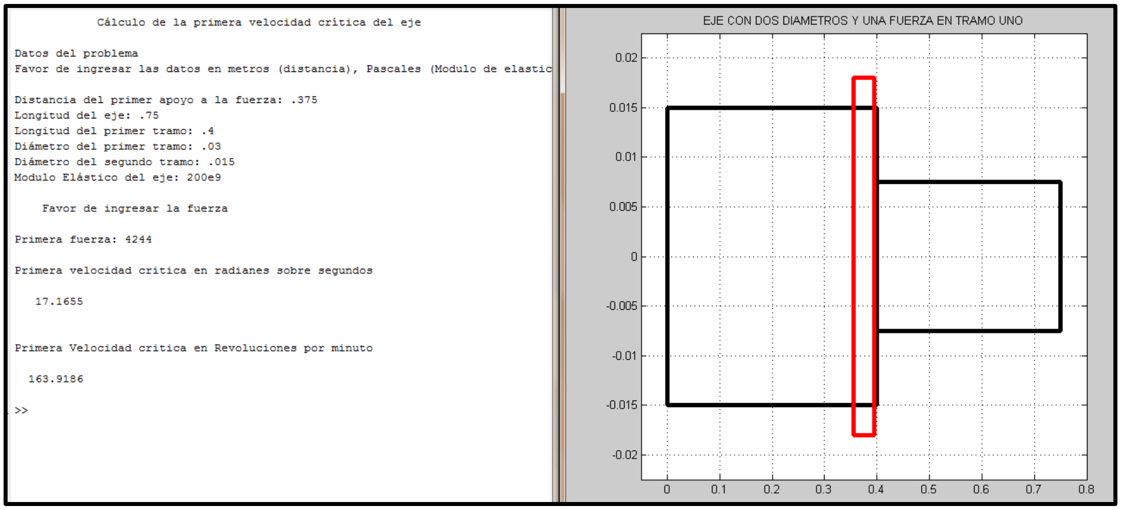


Figura 73. Eje con una fuerza en tramo uno

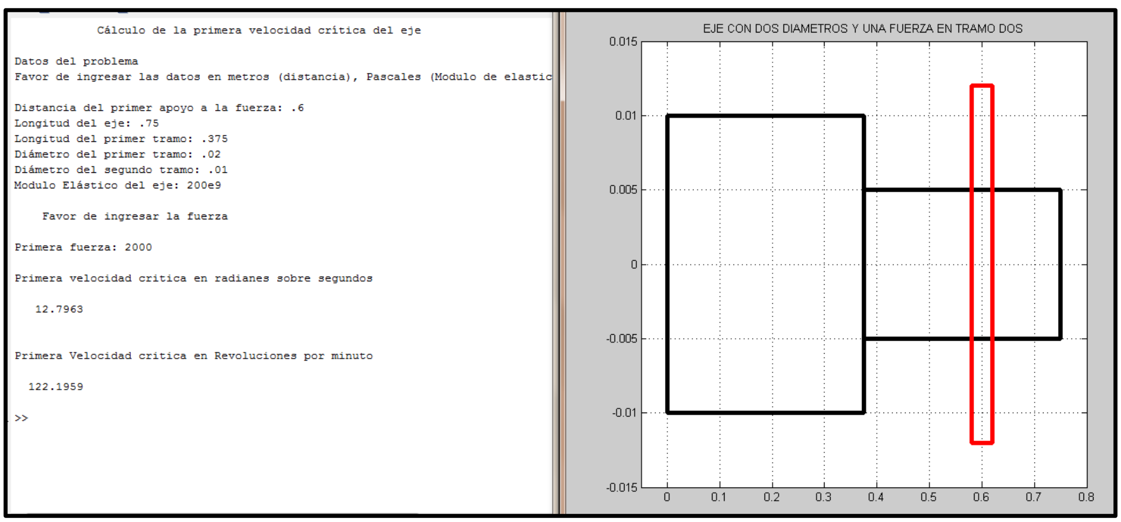


Figura 74. Eje con una fuerza en tramo dos

Dos fuerza

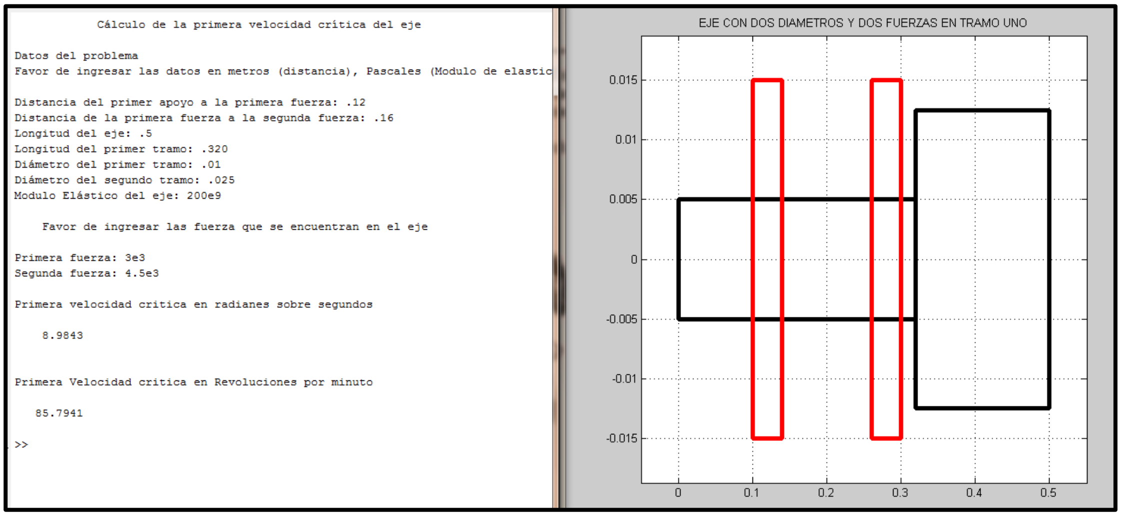


Figura 75. Eje con dos fuerzas en tramo uno

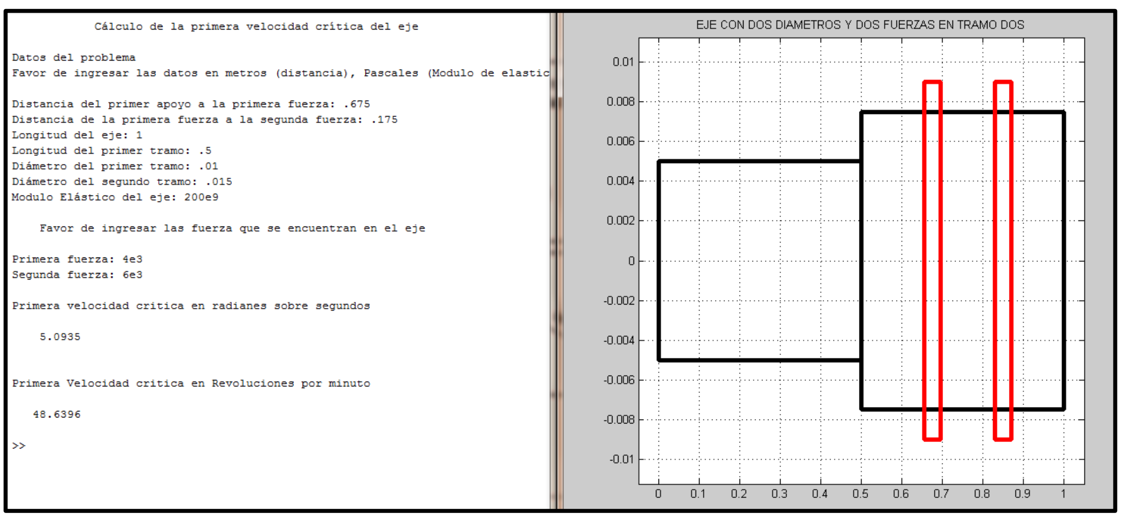


Figura 76. Eje con dos fuerzas en tramo dos

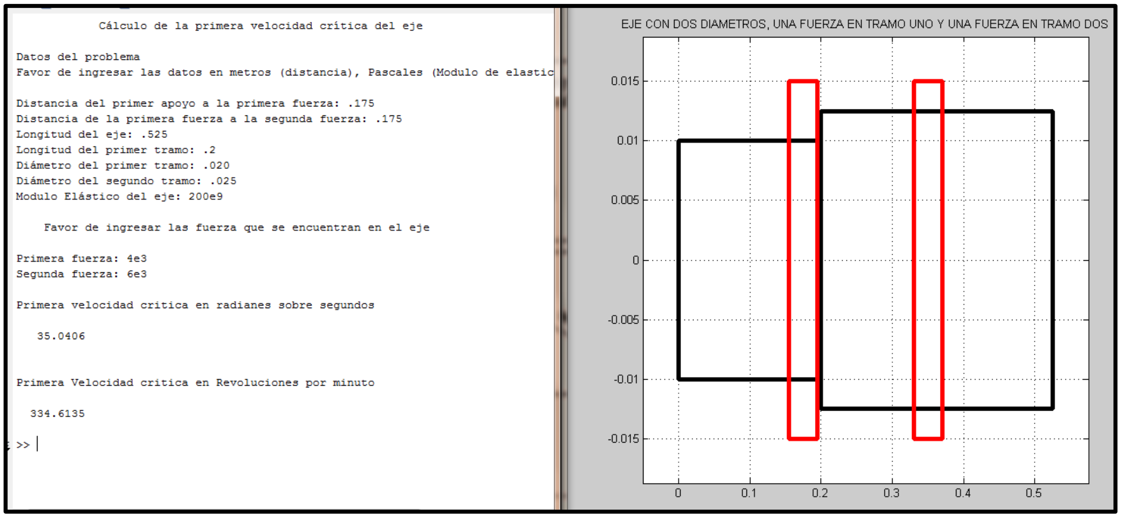


Figura 77. Eje con una fuerza en tramo uno y una fuerza en tramo dos

Tres fuerzas

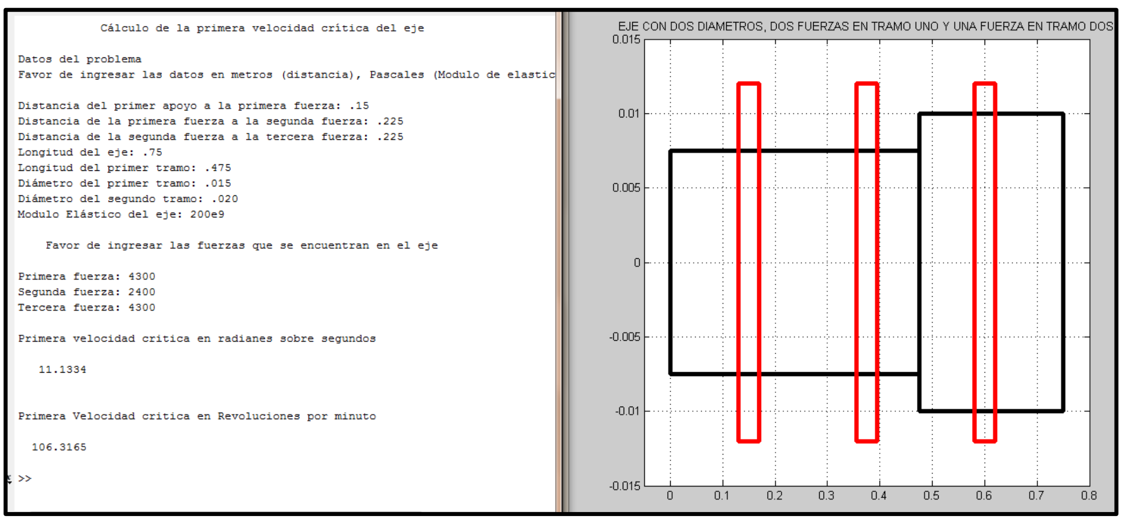


Figura 78. Eje con dos fuerzas en tramo uno y una fuerza en tramo dos

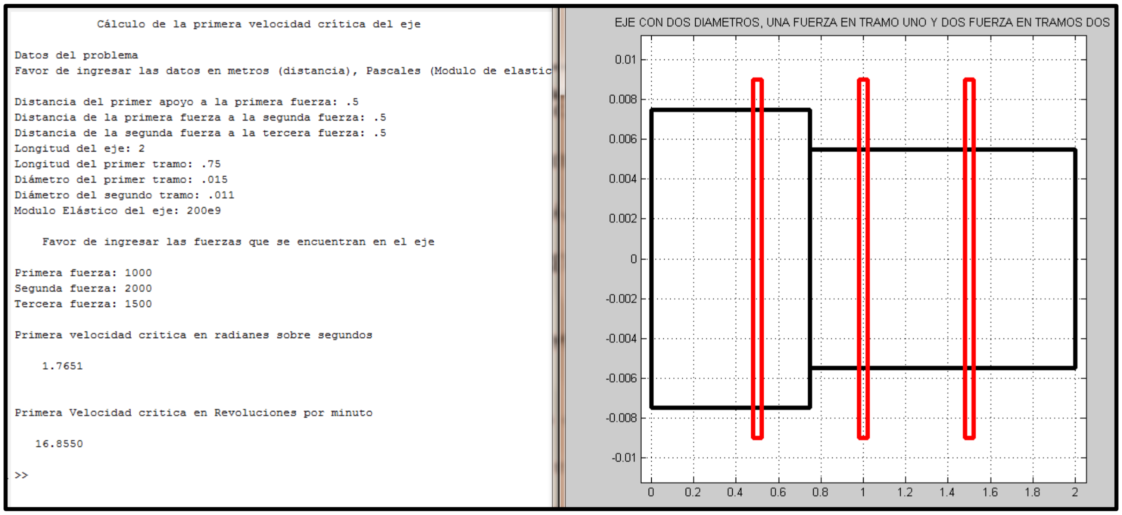


Figura 79. Eje con una fuerza en tramo uno y dos fuerzas en tramo dos

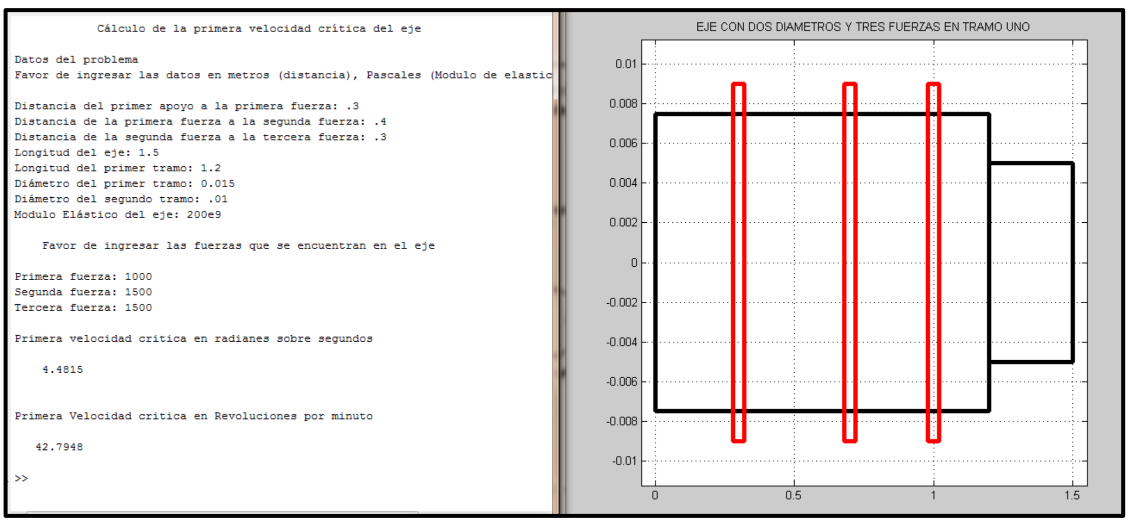


Figura 80. Eje con tres fuerzas en tramo uno

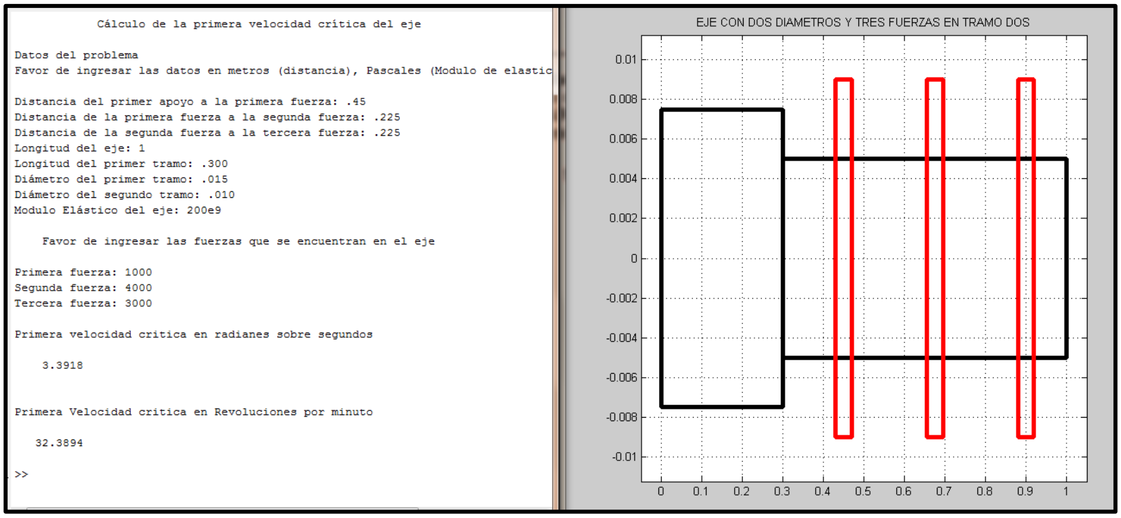


Figura 81. Eje con tres fuerzas en tramo dos

Eje con tres diámetros:

Sistema ingles

Una fuerza

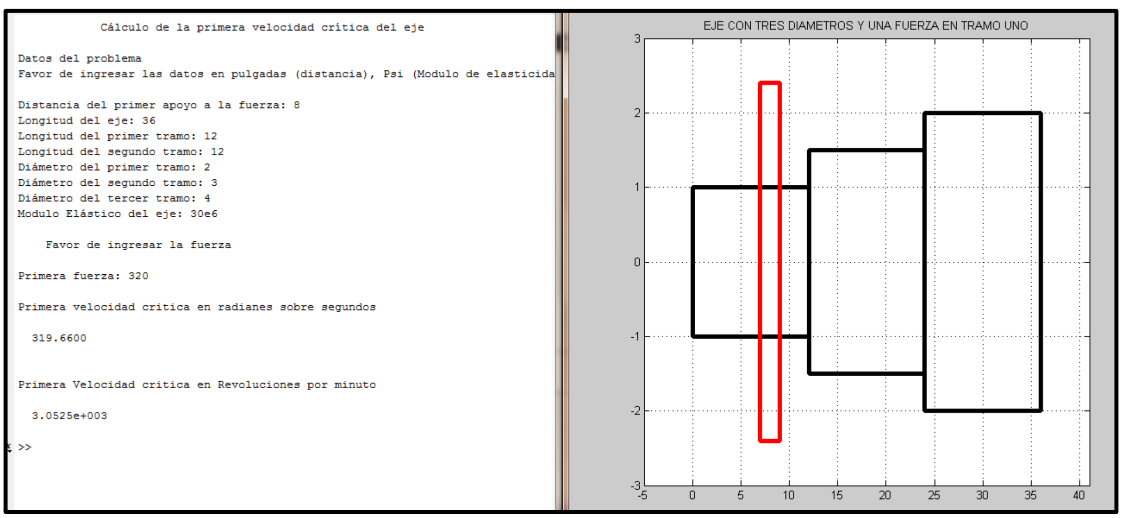


Figura 82. Eje con una fuerza en tramo uno

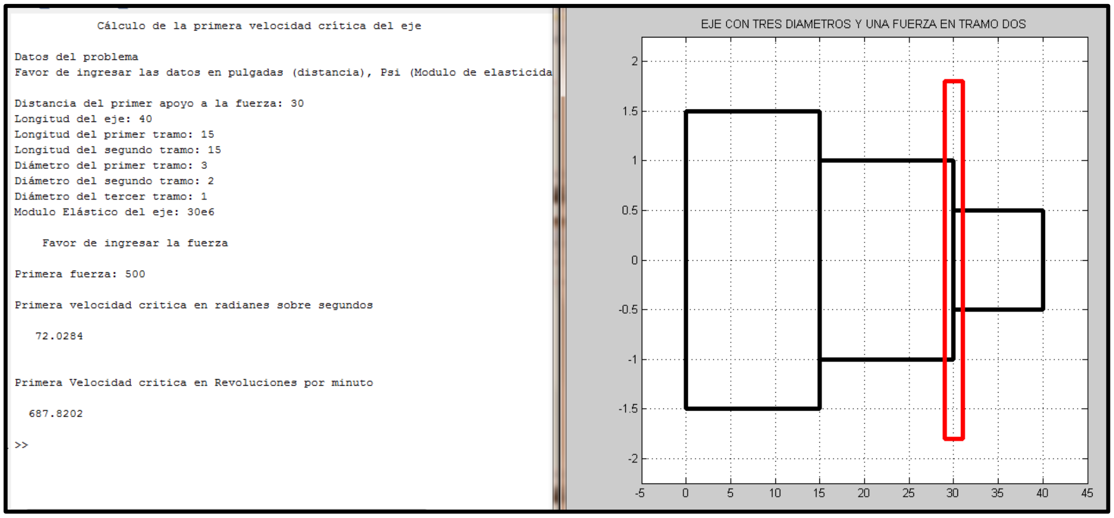


Figura 83. Eje con una fuerza en tramo dos

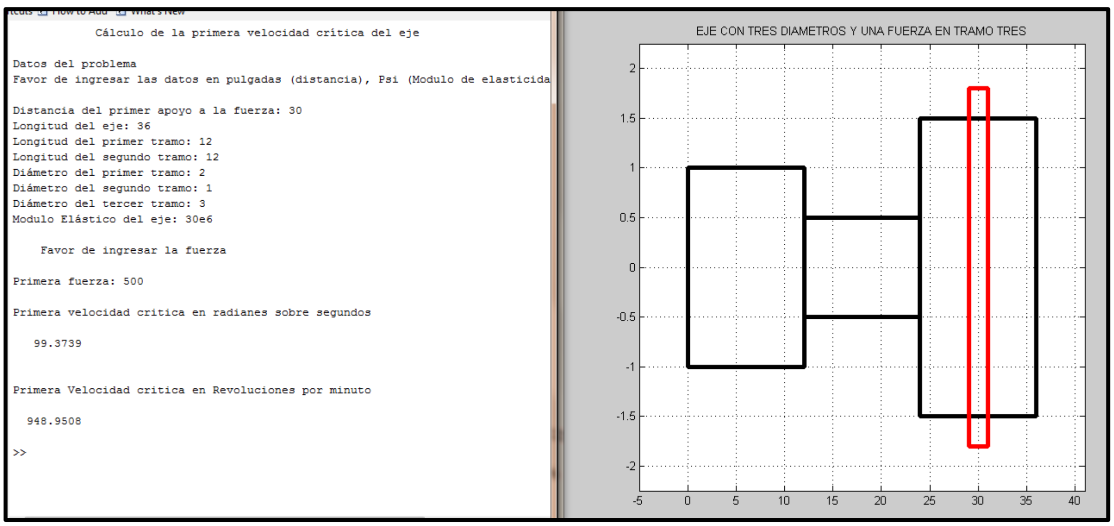


Figura 84. Eje con una fuerza en tramo tres

Dos fuerza

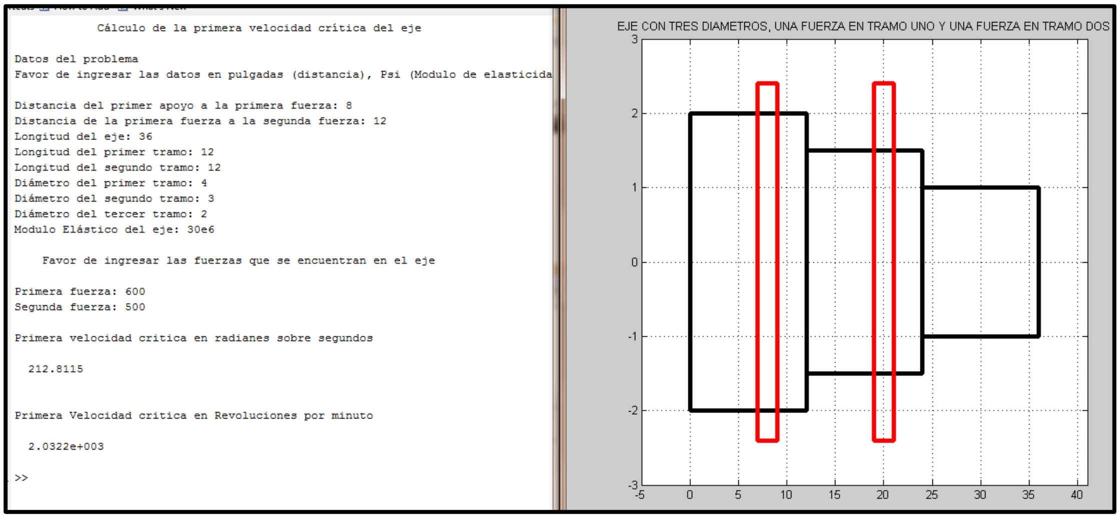


Figura 85. Eje con una fuerza en tramo uno y una fuerza en tramo dos

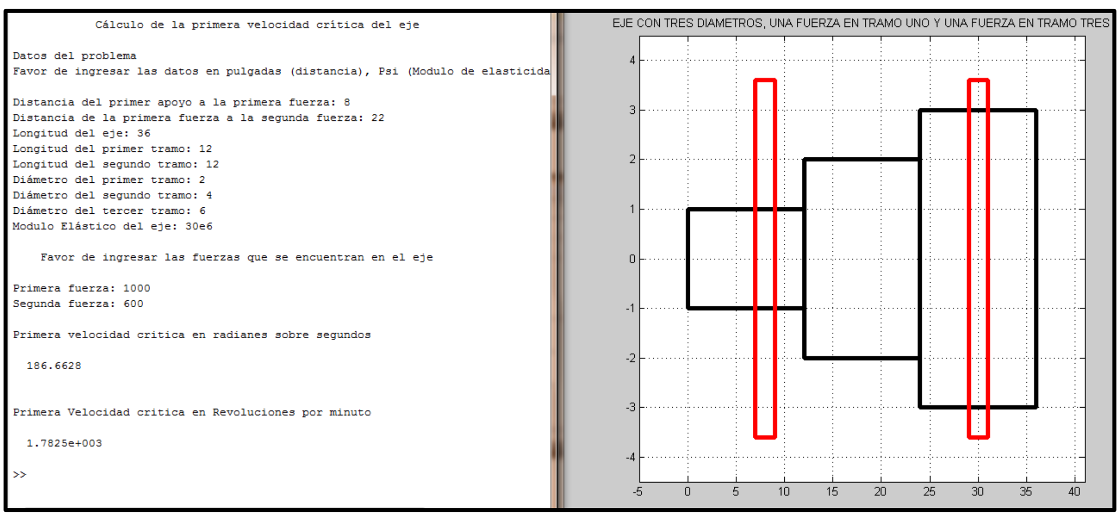


Figura 86. Eje con una fuerza en tramo uno y una fuerza en tramo tres

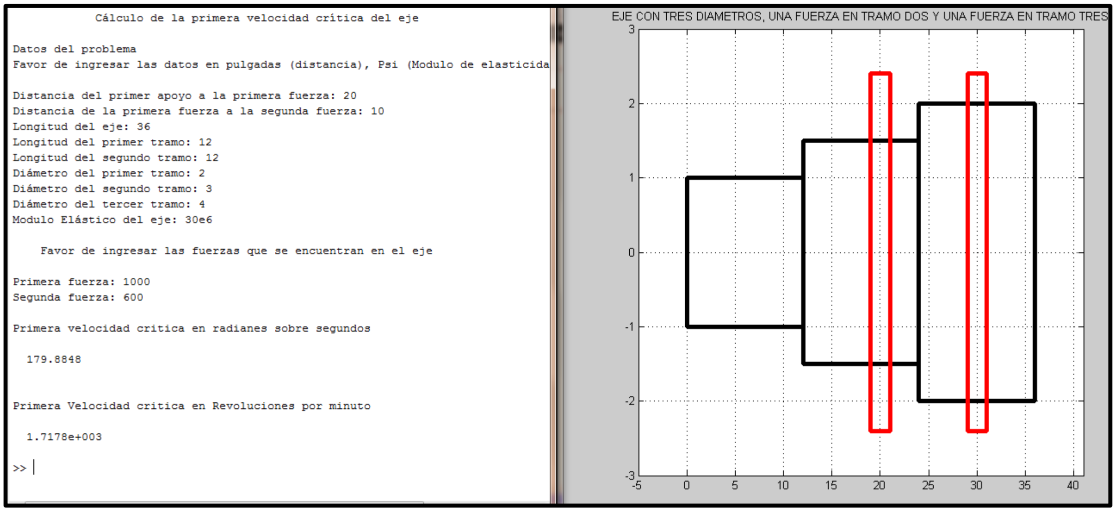


Figura 87. Eje con una fuerza en tramo dos y una fuerza en tramo tres

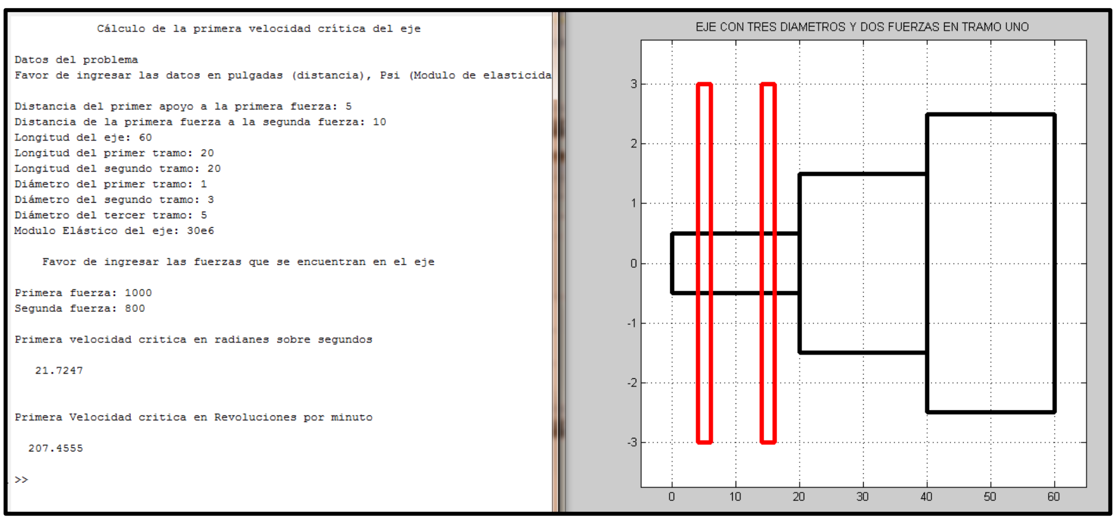


Figura 88. Eje con dos fuerzas en tramo uno

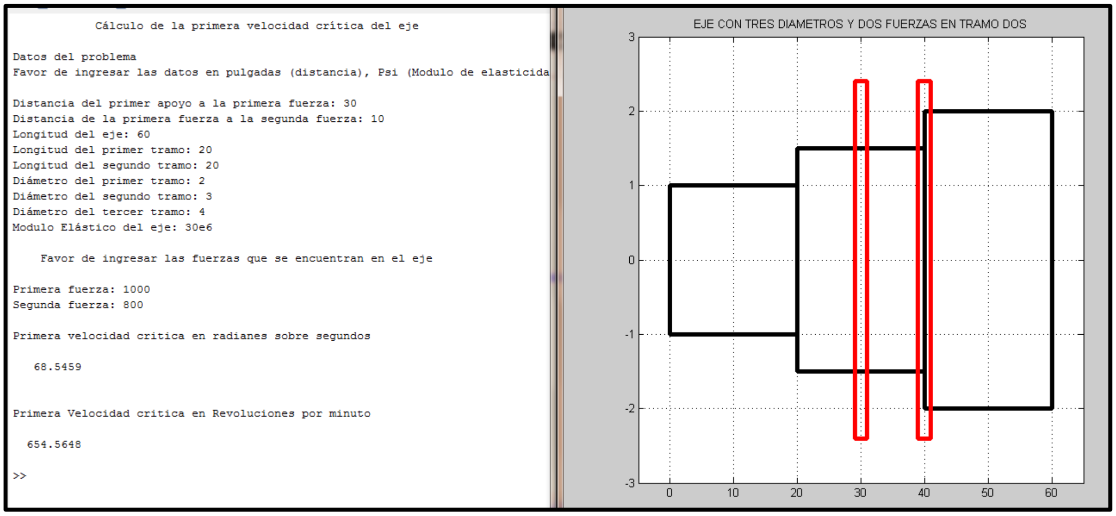


Figura 89. Eje con dos fuerzas en tramo dos

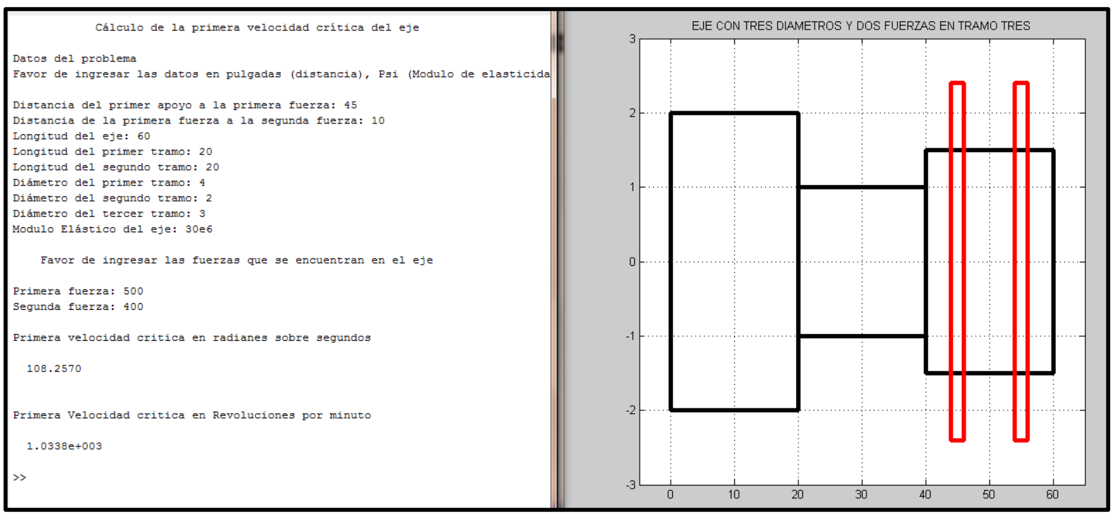


Figura 90. Eje con dos fuerzas en tramo tres

Tres fuerzas

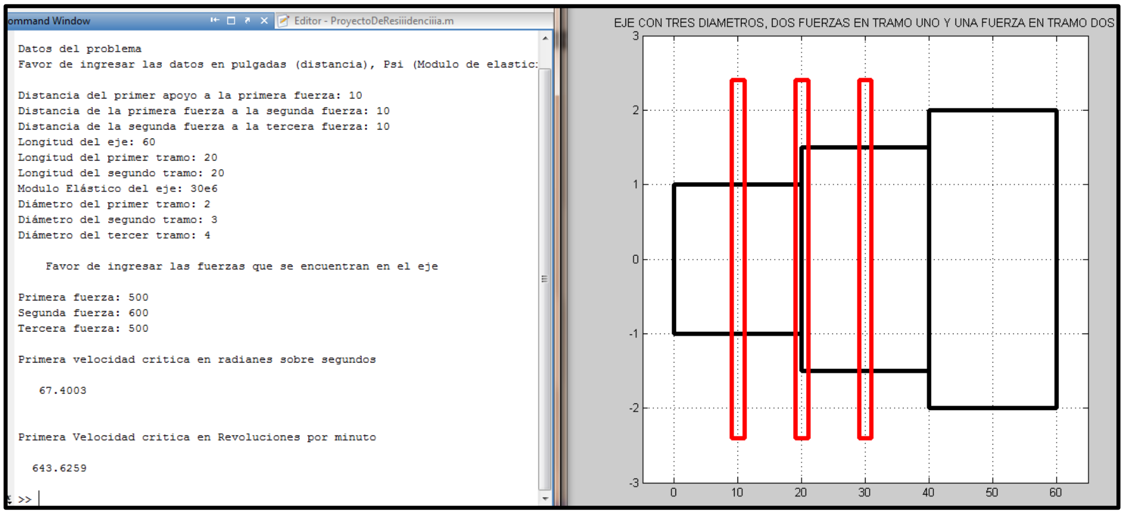


Figura 91. Eje con dos fuerzas en tramo uno y una fuerza en tramo dos

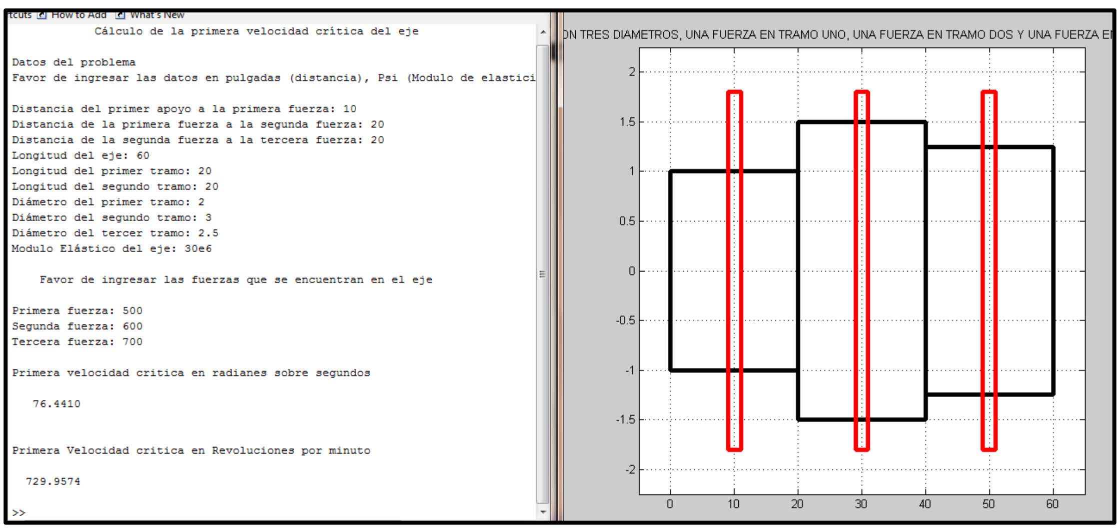


Figura 92. Eje con una fuerza en tramo uno, una fuerza en tramo dos y una fuerza en tramo tres

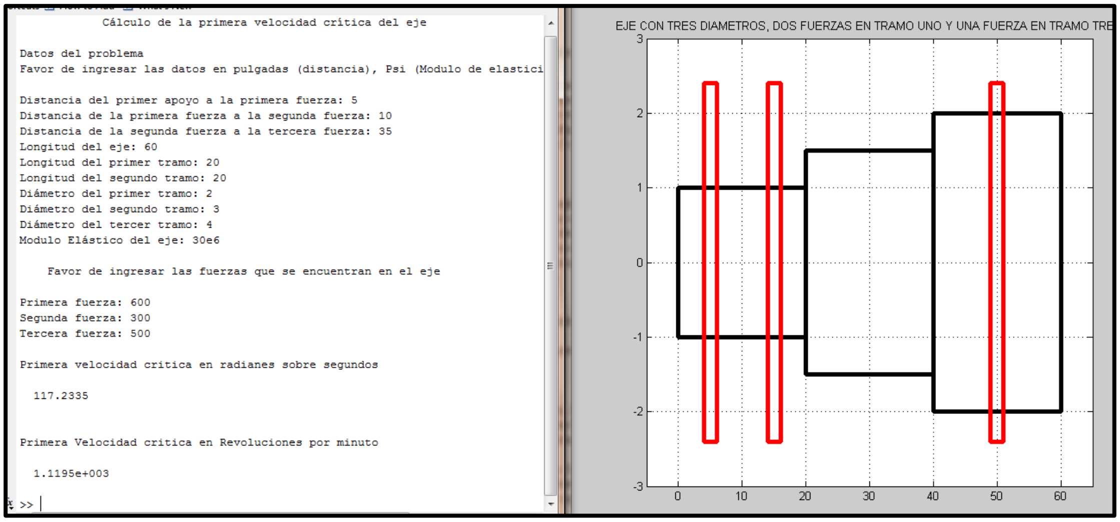


Figura 93. Eje con dos fuerzas en tramo uno y una fuerza en tramo tres

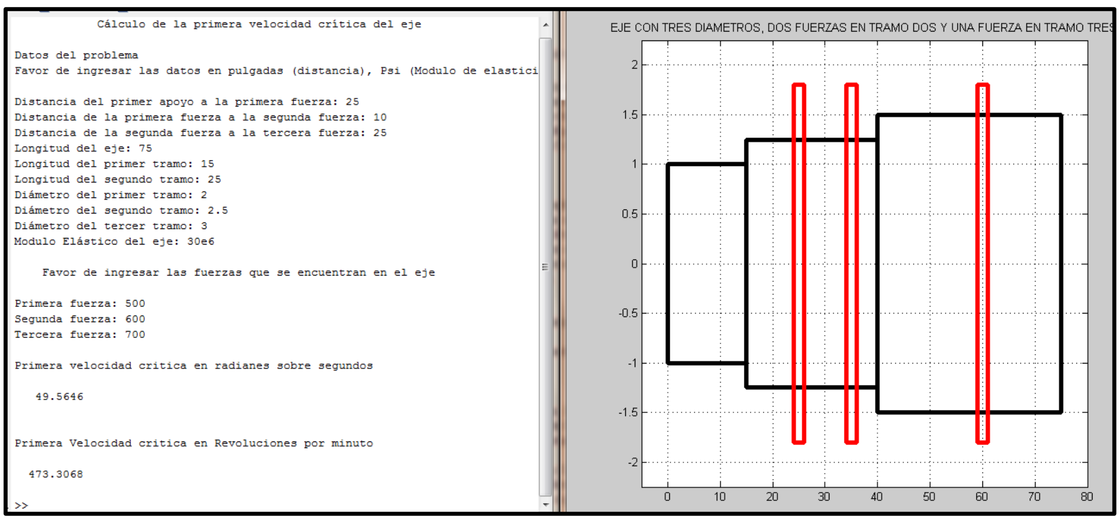


Figura 94. Eje con dos fuerzas en tramo dos y una fuerza en tramo tres

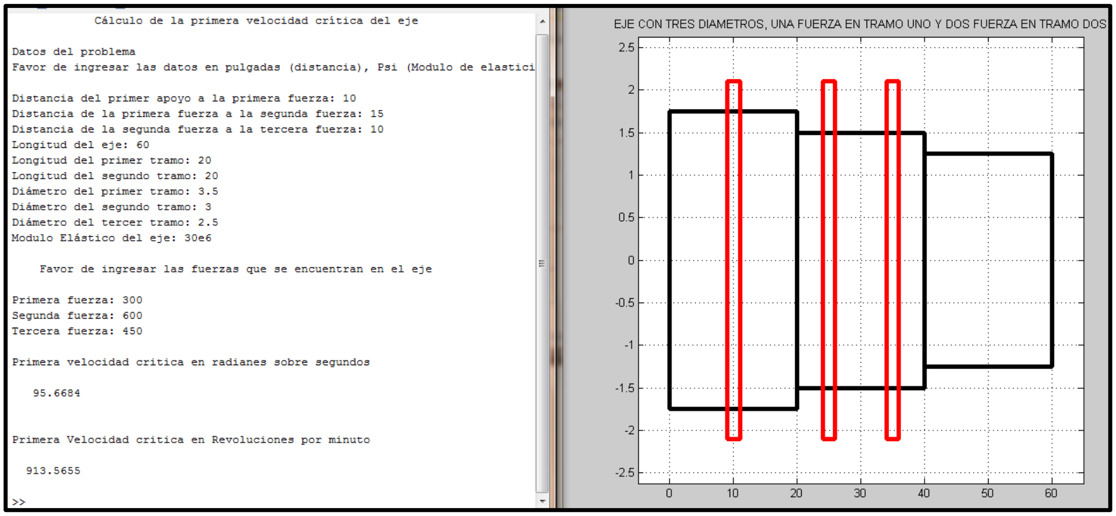


Figura 95. Eje con una fuerza en tramo uno y dos fuerzas en tramo dos

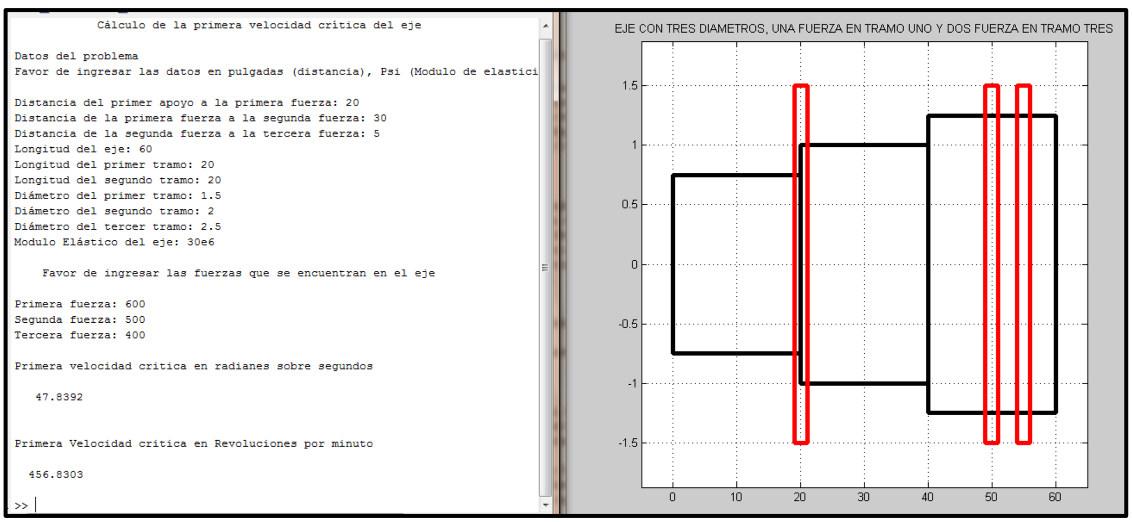


Figura 96. Eje con una fuerza en tramo uno y dos fuerzas en tramo tres

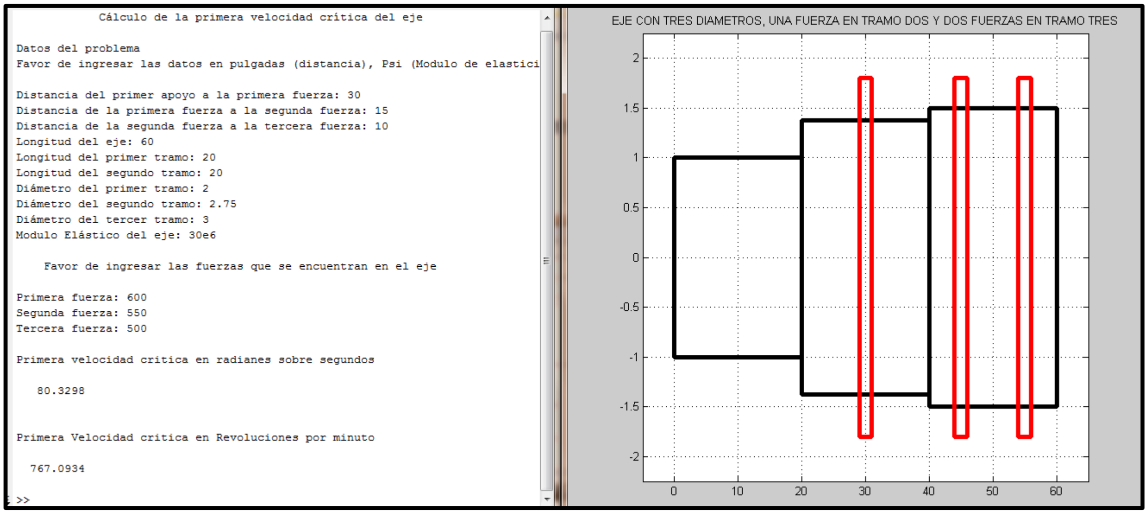


Figura 97. Eje con una fuerza en tramo dos y dos fuerzas en tramo tres

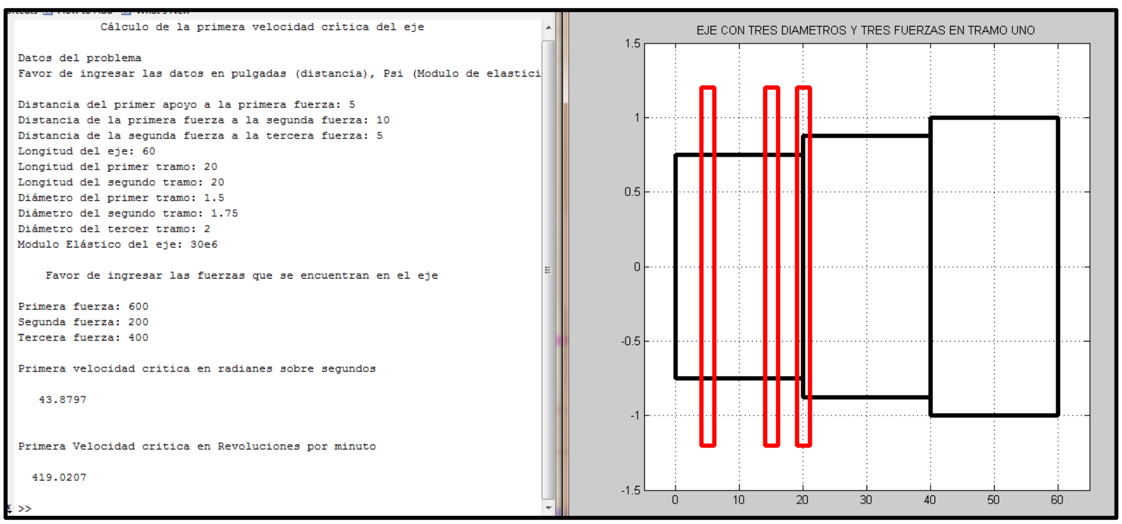


Figura 98. Eje con tres fuerzas en tramo uno

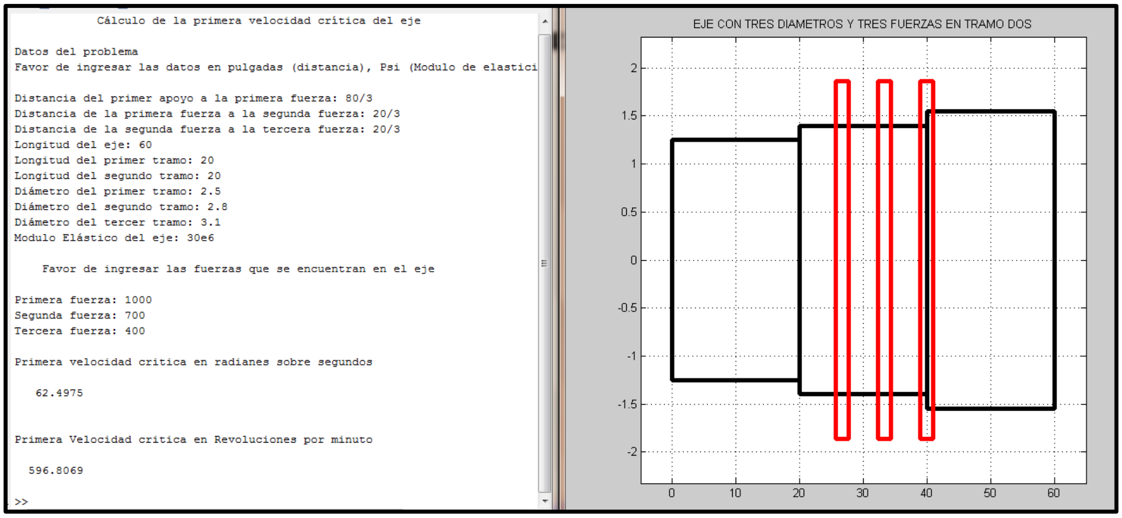


Figura 99. Eje con tres fuerzas en tramo dos

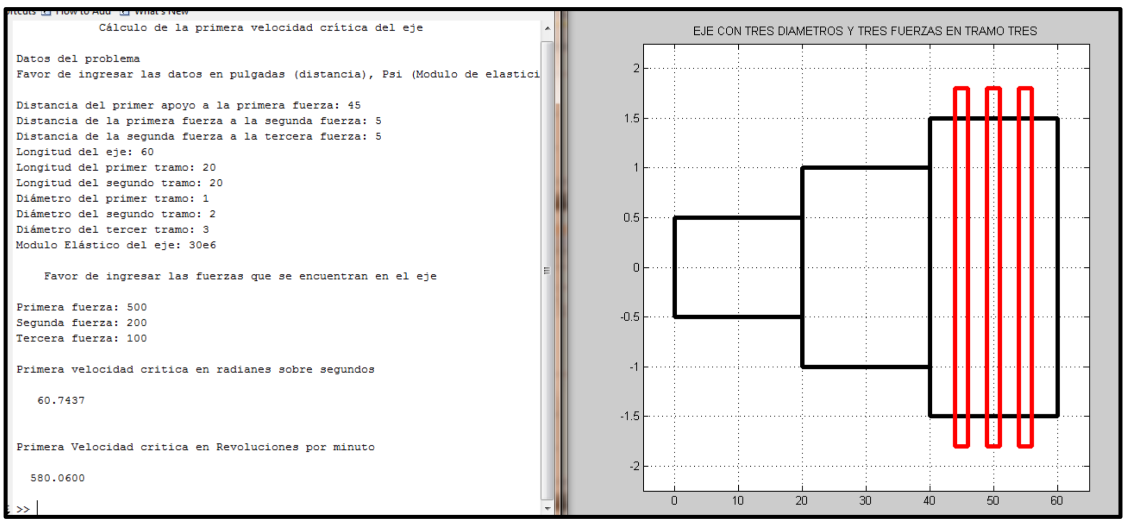


Figura 100. Eje con tres fuerzas en tramo tres

Sistema internacional

Una fuerza

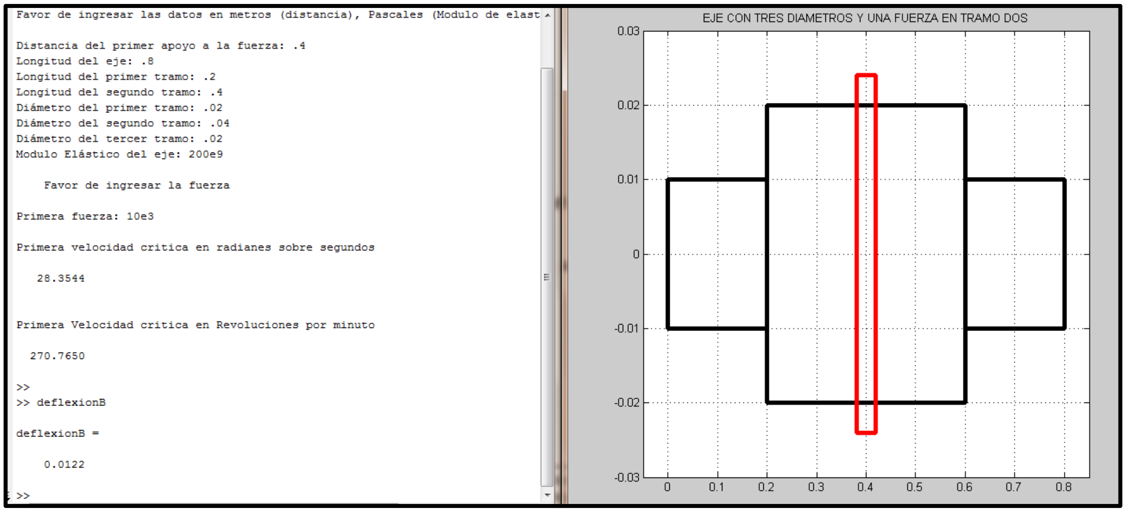


Figura 101. Eje con una fuerza en tramo dos

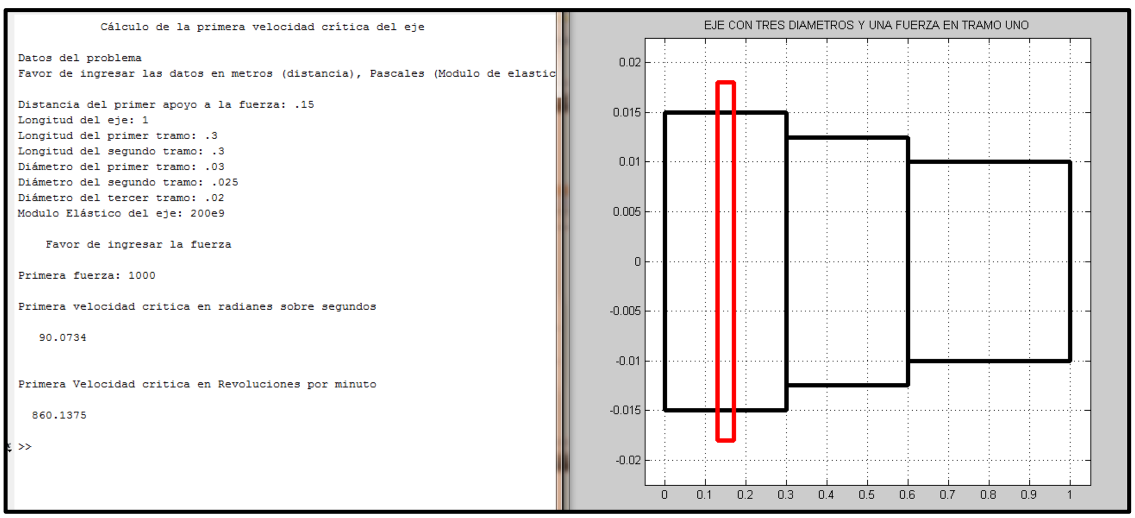


Figura 102. Eje con una fuerza en tramo uno

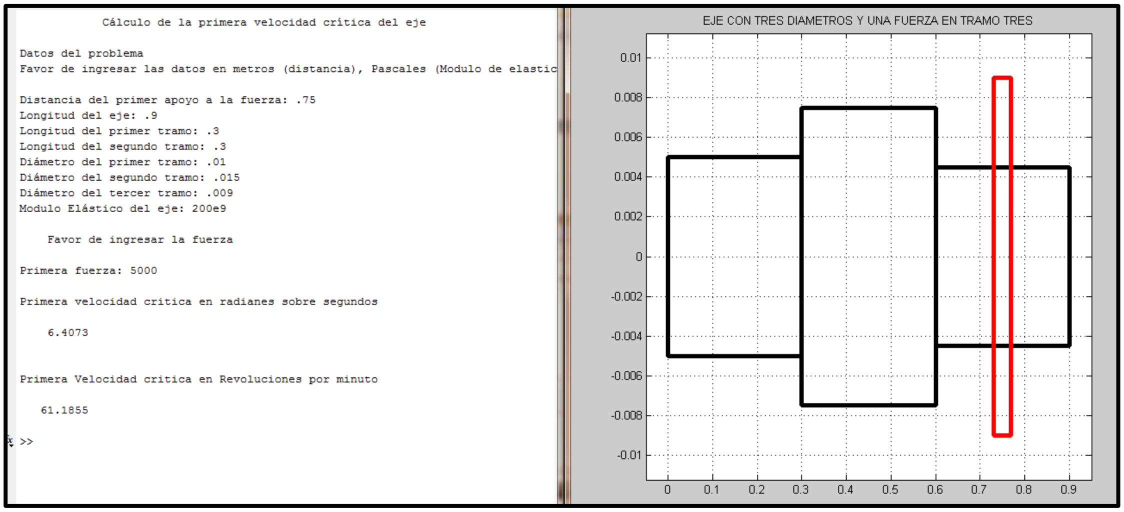


Figura 103. Eje con una fuerza en tramo tres

Dos fuerza

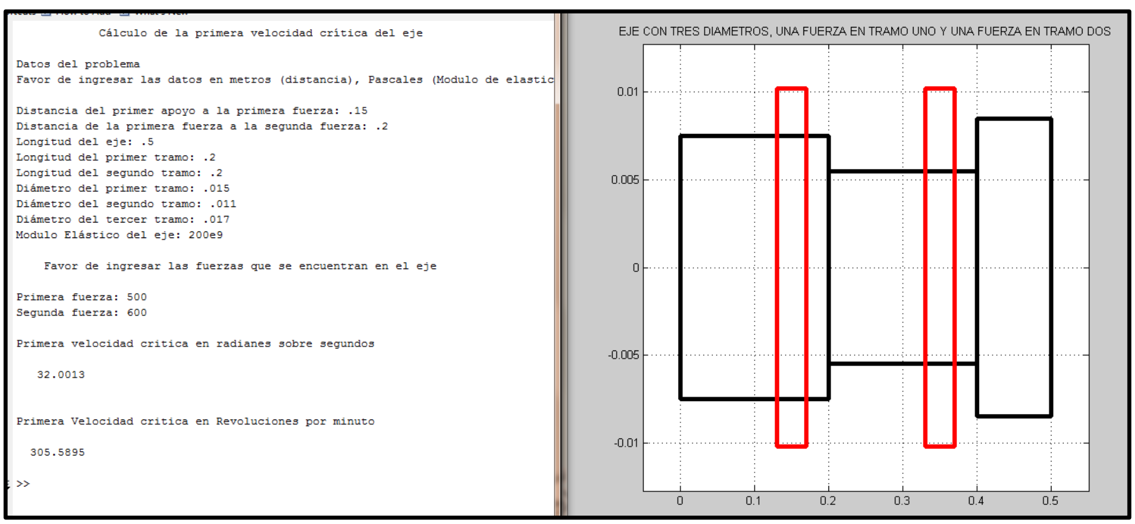


Figura 104. Eje con una fuerza en tramo uno y una fuerza en tramo dos

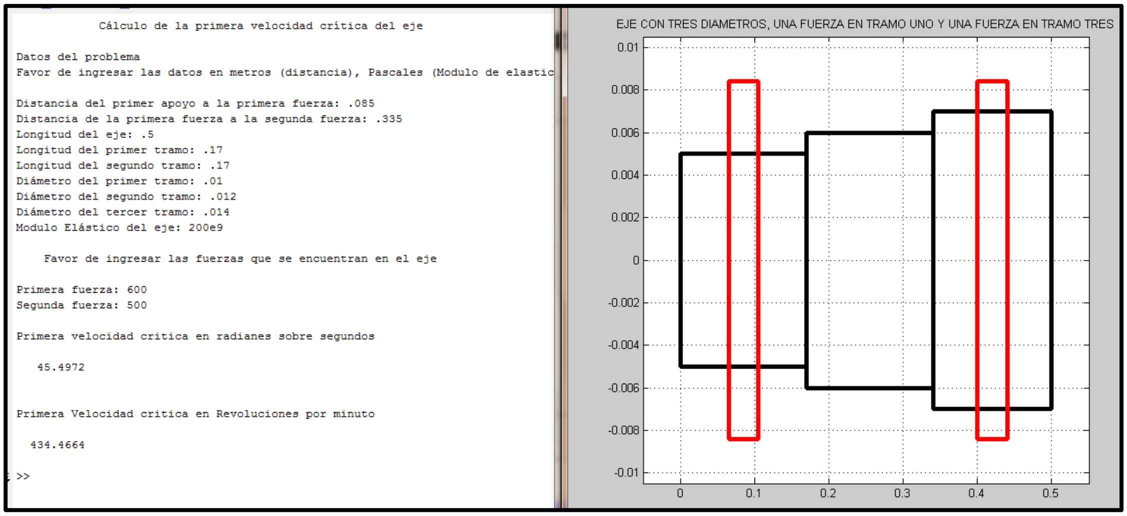


Figura 105. Eje con una fuerza en tramo uno y una fuerza en tramo tres

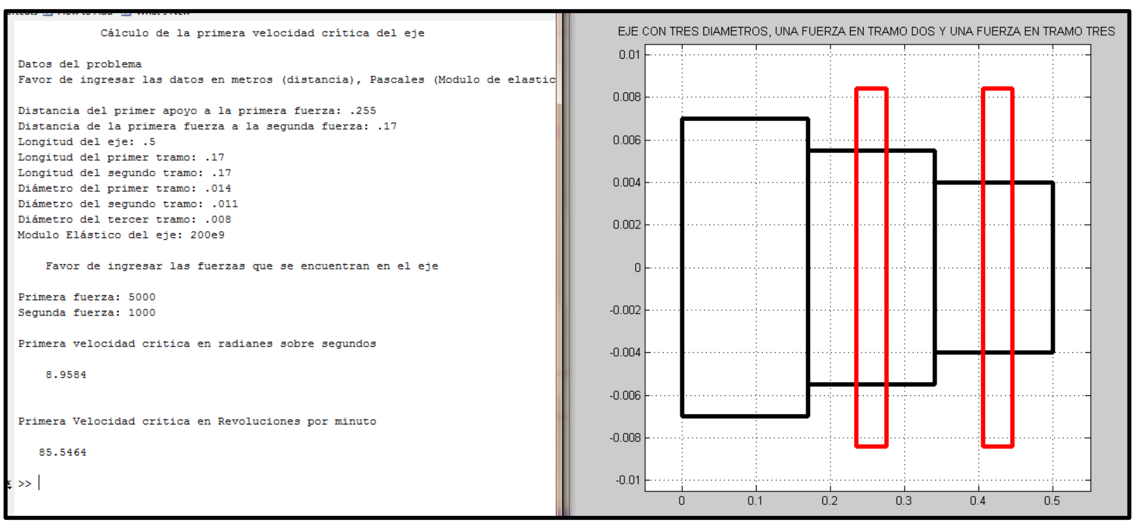


Figura 106. Eje con una fuerza en tramo dos y una fuerza en tramo tres

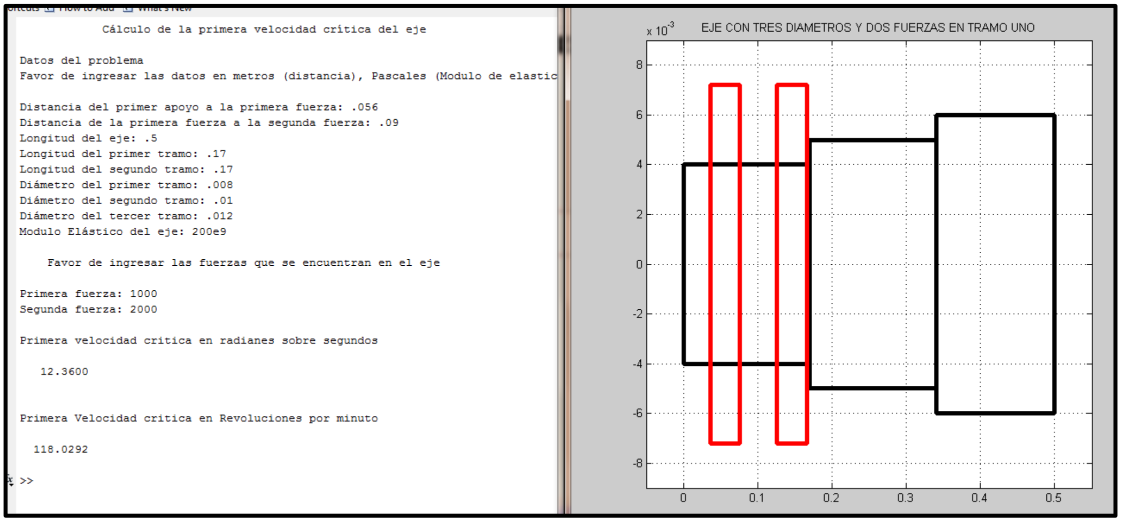


Figura 107. Eje con dos fuerzas en tramo uno

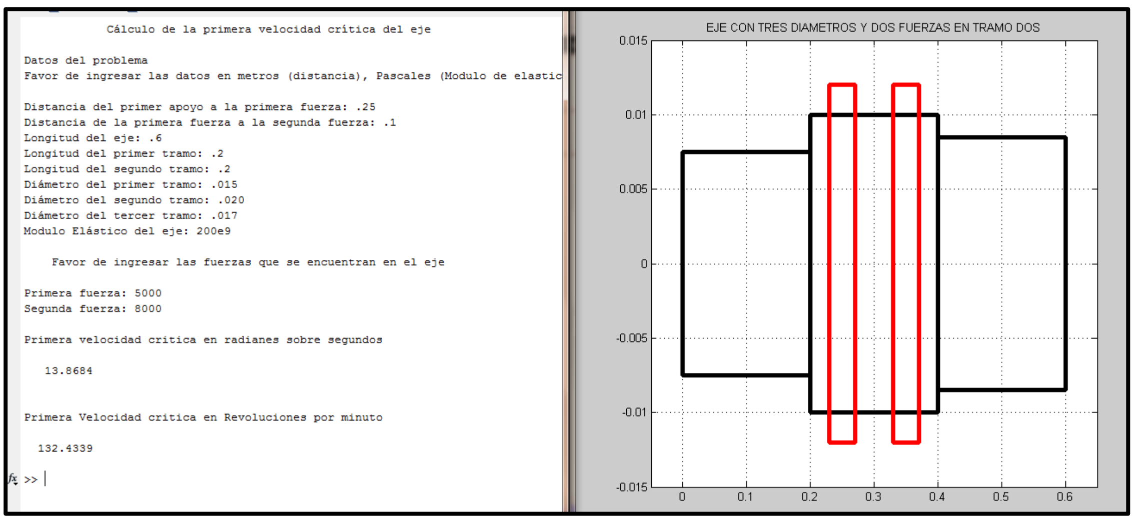


Figura 108. Eje con dos fuerzas en tramo dos

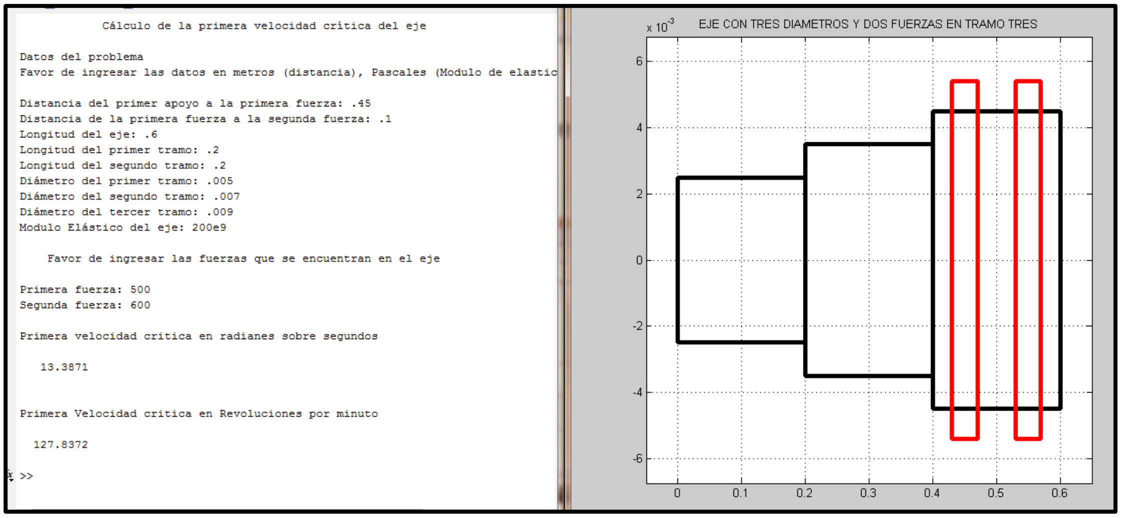


Figura 109. Eje con dos fuerzas en tramo tres

Tres fuerzas

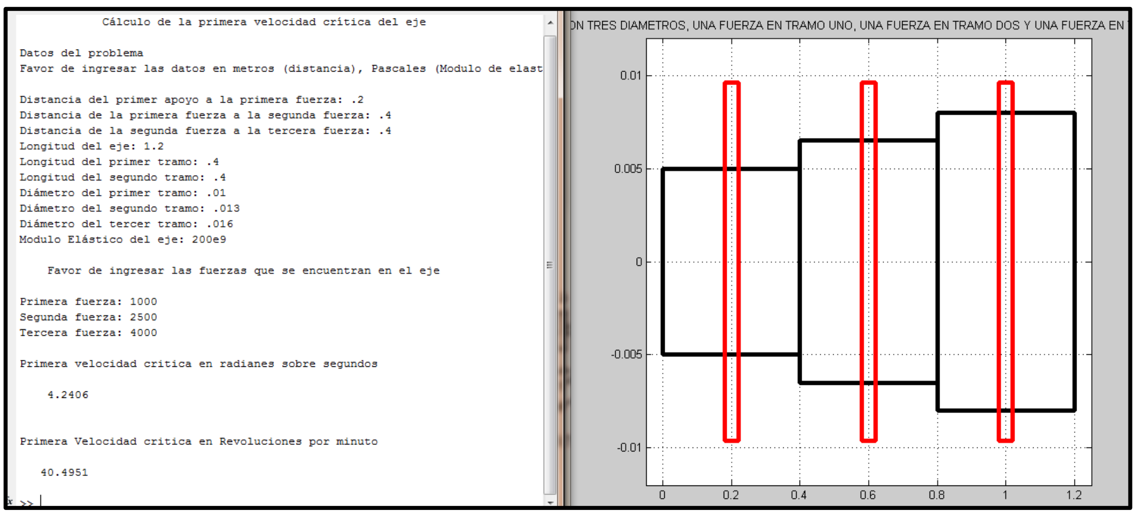


Figura 110. Eje con una fuerza en tramo uno, una fuerza en tramo dos y una fuerza en tramo tres.

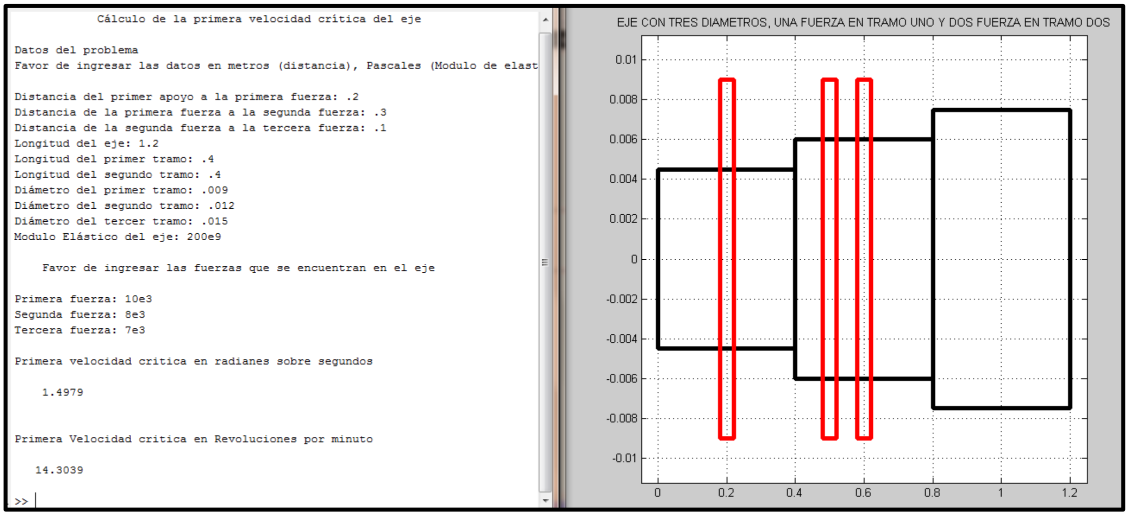


Figura 111. Eje con una fuerza en tramo uno y dos fuerzas en tramo dos

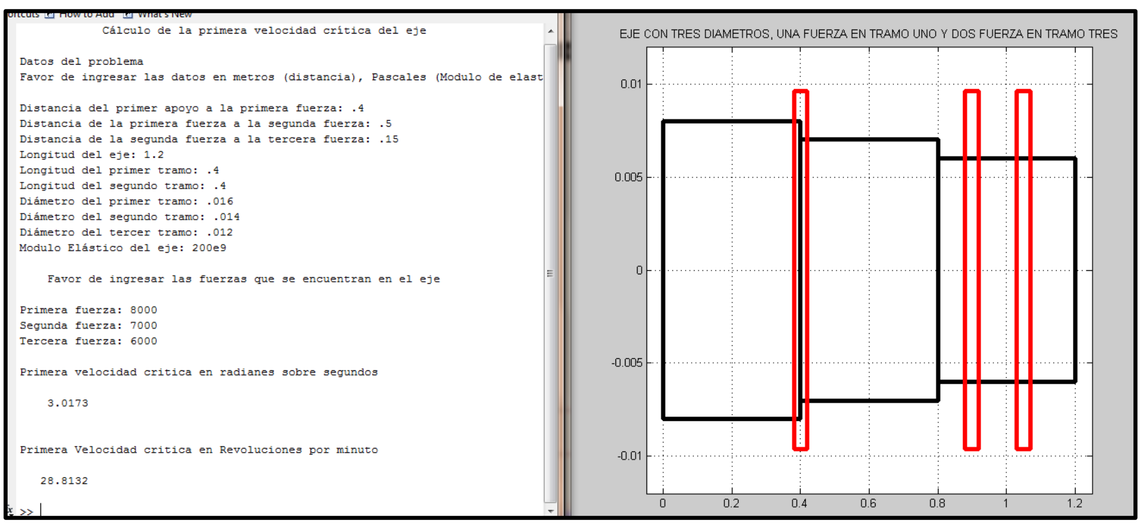


Figura 112. Eje con una fuerza en tramo uno y dos fuerzas en tramo tres

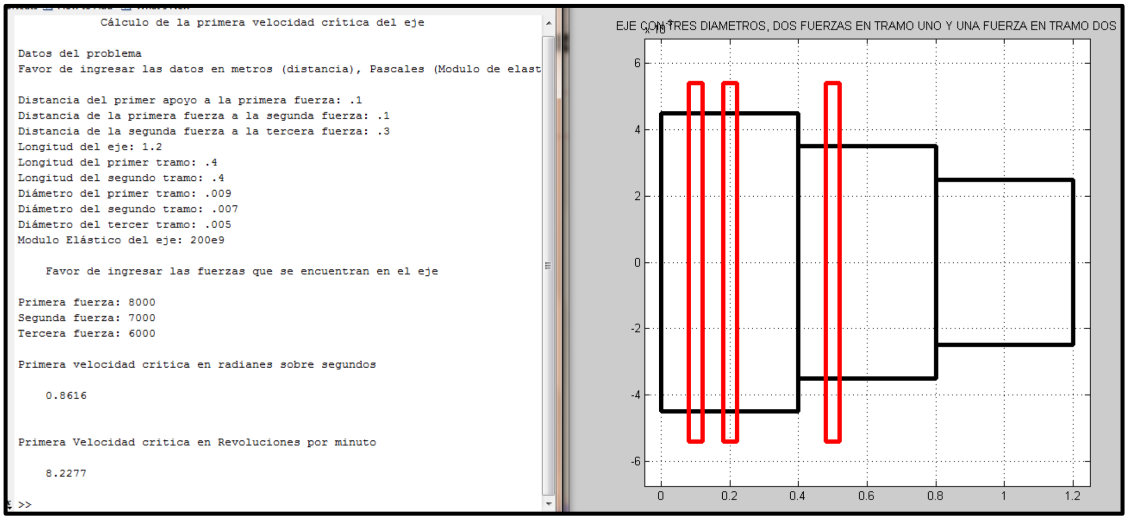


Figura 113. Eje con dos fuerzas en tramo uno y una fuerza en tramo dos

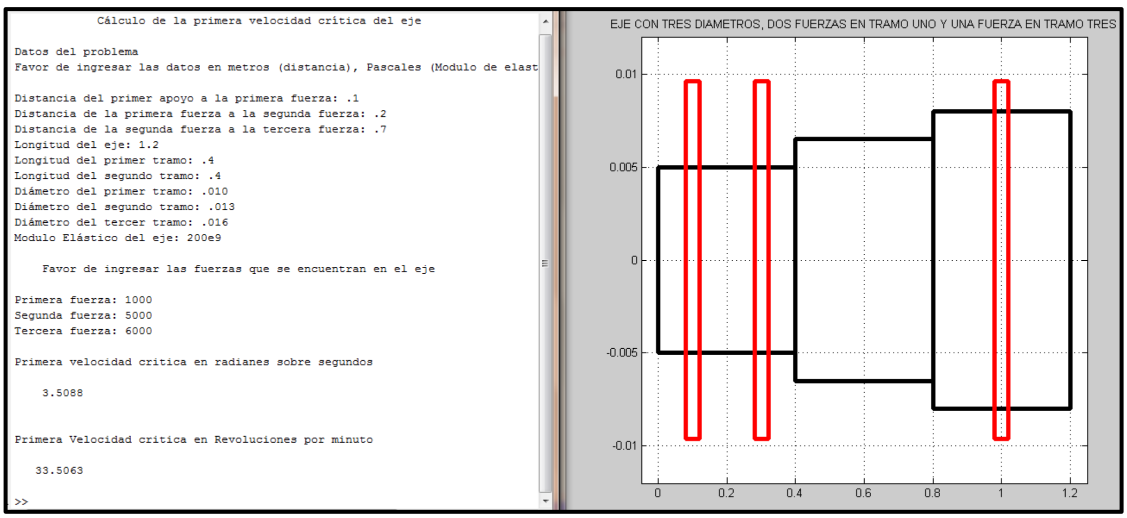


Figura 114. Eje con dos fuerzas en tramo uno y una fuerza en tramo tres

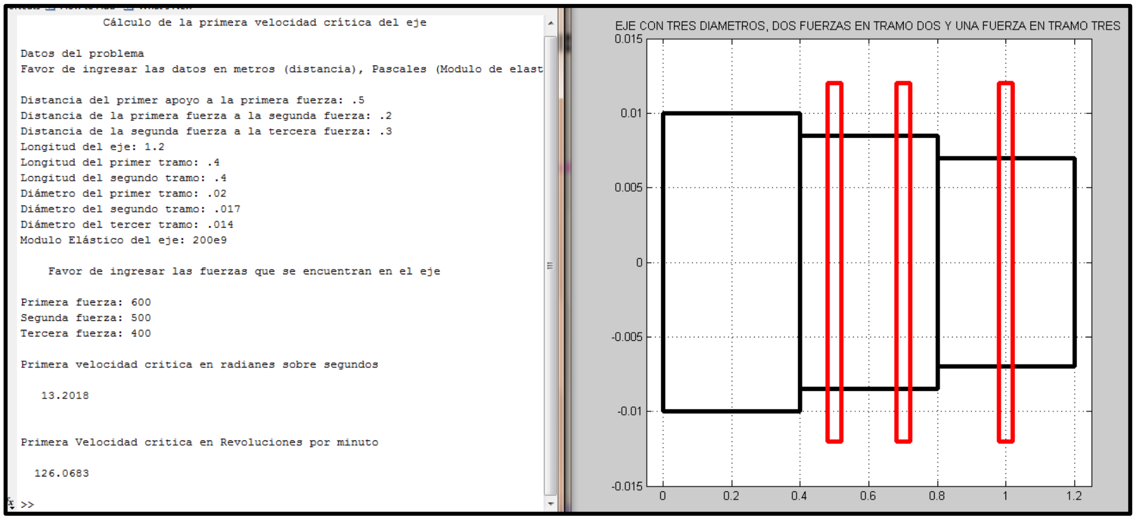


Figura 115. Eje con dos fuerzas en tramo dos y una fuerza en tramo tres

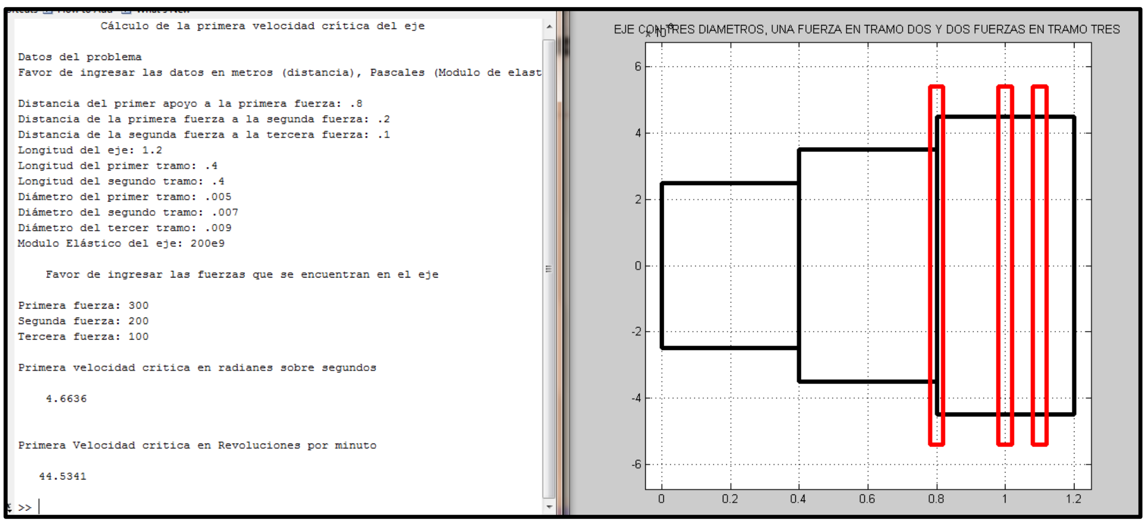


Figura 116. Eje con una fuerza en tramo dos y dos fuerzas en tramo tres

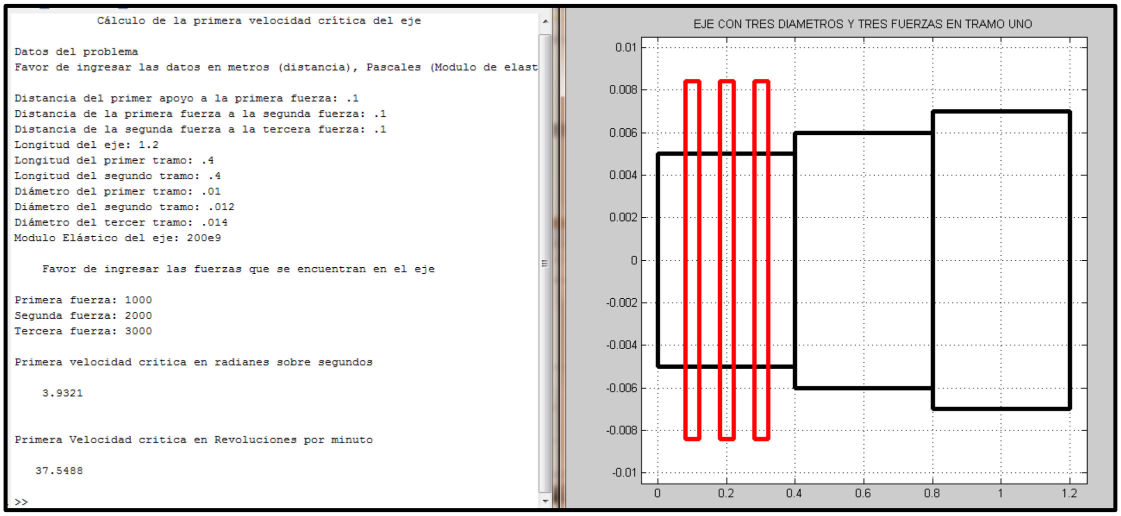


Figura 117. Eje con tres fuerzas en tramo uno

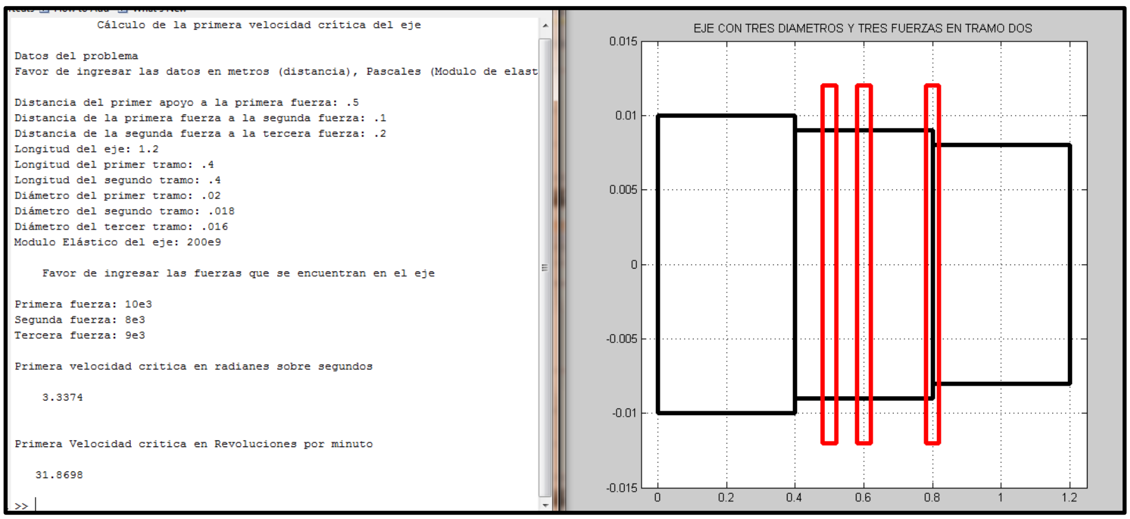


Figura 118. Eje con tres fuerzas en tramo dos

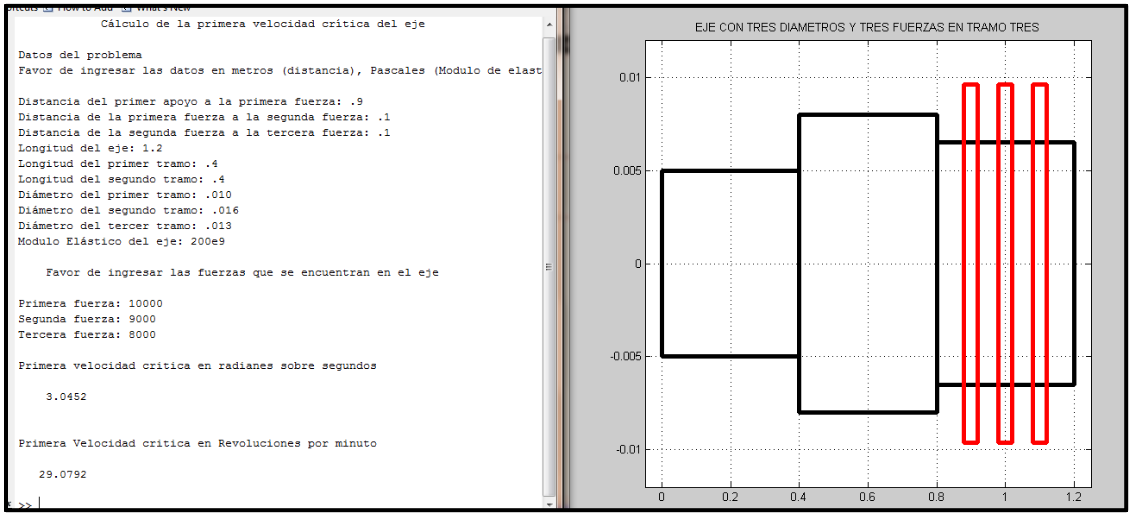


Figura 119. Eje con tres fuerzas en tramo tres

BIBLIOGRAFIA

- Ferdinand P. Beer,; E. Russell Johsnston, ”Mecánica de Materiales”, Editorial Mc Graw Hill, cuarta edición
- Amos Gilat, “Matlab, una introducción con ejemplos prácticos”, Editorial Reverte
- Allen S. Hall; Alfred R. Holowenco; Herman G. Laughlin, “Diseño de Máquinas”, Editorial Mc Graw Hill, primera edición
- Angel Garcimartin, “Introducción al MatLab”, [En linea], http://fisica.unav.es/~angel/matlab/matlab0.html
- Javier García de Jalón; Jóse Ignacio Rodríguez; Jesús Vidal, ”Aprenda MatLab 7.0 como si estuviera en primero”, [En línea], http://mat21.etsii.upm.es/ayudainf/aprendainf/Matlab70/matlab70primero.pdf
- Príncipe Gavidia; Lineker L., “Primera práctica de MatLab”, [En línea], http://prinlider.onlinewebshop.net/Practica%2001-Metodos.pdf
- Neiker D.; Arévalo Roque, “Diseño por rigidez y análisis dinámico”,[En línea], http://www.wiziq.com/tutorial/364303-analisis-de-vibraciones